Nombre: ______________________________ *Curso:* ________

Matemáticas II – Límites y continuidad de funciones – 17/10/2016

EJERCICIO 1:

Consideremos la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+2x}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [1,75] Calcula los valores de las constantes a y b..

b) [0,75] Obtén las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 2:

Halla a para que la gráfica de la función f definida mediante

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + 1}$$

tenga una asíntota que pase por el punto $(2\,,1)$.

EJERCICIO 3:

a) [1] Esboza la gráfica de $y = |\ln x|$. Indica valor y límite en la discontinuidad que se observa.

b) [1,5] Obtén las asíntotas de $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2-x} - 1}$.

EJERCICIO 4:

a) [1,5] Demuestra que la ecuación $\mathrm{e}^{-x} - \operatorname{sen}(x) = 0$ tiene alguna solución, aproximándola hasta las décimas.

b) [1] Esboza las gráficas $y = \mathrm{e}^{-x}$ e $y = \operatorname{sen}(x)$ y, a la vista de ellas, indica cuántas soluciones positivas y cuántas negativas tiene la ecuación del apartado anterior.

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para los separa-fórmulas: $x = -1$ y $x = 1$. Veamos detenidamente:

$$x=-1 \left\{ \begin{array}{l} f\left(-1\right)=\dfrac{3}{-1}=-3 \\ f\left(-1-\right)=\dfrac{3}{-1}=-3 \\ f\left(-1+\right)=-a+b \end{array} \right\} \xrightarrow{continua} -a+b=-3$$

$$x=1 \left\{ \begin{array}{l} f\left(1\right)=a+b \\ f\left(1-\right)=a+b \\ f\left(1+\right)=\dfrac{3}{1}=3 \end{array} \right\} \xrightarrow{continua} a+b=3$$

Reuniendo ambas obtenemos un sistema:

$$\left. \begin{array}{r} -a+b=-3 \\ a+b=3 \end{array} \right\} \rightarrow\ a=3\,,b=0$$

b) <u>Asíntotas verticales</u>. Como es continua en todo punto, no tiene.

<u>Asíntotas horizontales</u>. Calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{x}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x}{x}=\frac{2}{1}=2$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales: $y=-2$ para $x\to-\infty$ e $y=2$ para $x\to+\infty$.

EJERCICIO 2:

Como el denominador x^2+1 no tiene raíces reales, la función es continua en todo punto y no hay asíntotas verticales. Y como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no hay asíntotas horizontales.

Tiene que ser una asíntota oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+ax^2}{x^2+x}=1$$

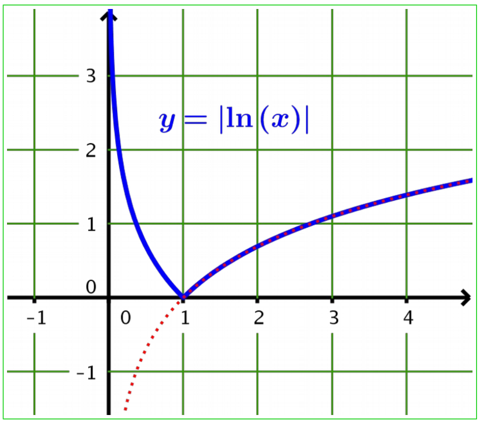
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+ax^2}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-x}{x^2+1}=a$$

La asíntota oblicua es $y=x+a$. Y como pasa por el punto $(2\,,1)$:

$$1=2+a\to a=-1$$

EJERCICIO 3:

a) La función logaritmo es conocida. Basta reflejar la parte bajo el eje de abscisas.



La única discontinuidad que se aprecia es la de tipo infinito para $x = 0$, donde no tiene valor y es $f(0+) = +\infty$.

b) Asíntotas verticales: buscamos saltos infinitos:

$$e^{2-x} - 1 = 0 \to e^{2-x} = 1 \to x = 2$$

Comprobemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{e^{2-x} - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales. Calculemos los límites en el infinito.

$$f(-\infty) = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \to \quad y = 0$$

$$f(+\infty) = \frac{1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1 \quad \to \quad y = -1$$

EJERCICIO 4:

a) Las soluciones de la ecuación son los ceros de la función

$$f(x) = e^{-x} - \operatorname{sen} x$$

f es continua en todo punto.

$f(0.5) = +0,12\ldots$

$f(0.6) = -0,01\ldots$

Por el Teorema de Bolzano en $[0.5\,, 0.6]$ se deduce que $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(0.5\,, 0.6)$, y por ello será $x = 0.5\ldots$.

b) Con un par de tablitas de valores dibujamos las gráficas indicadas y observemos que no hay soluciones negativas pero que hay infinitas soluciones positivas, al cortarse ambas en infinitos puntos por la periodicidad del seno y la asíntota de la exponencial.