Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Recuperación Álgebra Lineal	

EJERCICIO 1: [5]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$ y compruébelo.

b) [1] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + A^2 = I_2$.

c) [0,75] Halle una matriz Y tal que $A^3 + 3Y = B \cdot B^t$.

d) [0,75] Obtenga A^{100} y A^{111}.

e) [1] Calcule el determinante de una matriz Z que verifica $Z^2 \cdot A \cdot Z^{-1} = B \cdot B^t$.

f) [0,5] Razone si existe alguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2: [2,5]

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Halle la matriz $A^3 + \mathrm{I}$.

b) [0,75] Calcule A^{20}.

c) [1,25] Averigüe para qué valores de x la matriz $A + x\mathrm{I}$ tiene inversa y calcúlela para $x = 0$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Determine $a\,, b\,, c$ sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 y verifica

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

I : 1 , 2 , 3 / II : 4 , 5 , 6 , 7 / I + II : 1 [5] , 4 [3] , 7 [2]

EJERCICIO 4: [3]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)\,x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & ay & - & z & = & a \end{array}\right\}$$

a) [0,75] Para cierto valor del parámetro a la inversa de la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Averigüe cuál es el valor de a y resuelva el sistema matricialmente en este caso.

b) [1,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro a.

c) [0,75] Resuélvalo para $a = 1$.

EJERCICIO 5: [2]

Discuta y resuelva, cuando sea posible, el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & m \\ mx & + & y & = & m \\ mx & + & my & = & 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 6: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} kx + 4y - kz = 6 \\ x + ky - z = 3 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema?

c) [0,5] Razone si para cierto valor de k es $(1\,,1\,,0\,)$ una solución.

EJERCICIO 7: [2,5]

Un estado compra 200 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 20, 25 y 30 dólares respectivamente. La factura total asciende a cuatro millones ochocientos mil dólares.

Si del segundo suministrador recibe el 25% de lo que adquiere a los otros dos, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

I : 1 , 2 , 3 / II : 4 , 5 , 6 , 7 / I + II : 1 [5] , 4 [3] , 7 [2]

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B\cdot C^t=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&-a\\0&-b\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b&a+2b\\2b&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{\begin{array}{rcr}-a+b&=&-1\\a-2b&=&0\\2b&=&2\\-b&=&-1\end{array}\right|\;\rightarrow\; a=2\,,b=1$$

b) A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A)=1-0=1\quad\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\mathrm{Adj}(A)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$$

Como A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X\cdot A+A^2=I_2\;\rightarrow\;X\cdot A=I_2-A^2\;\rightarrow\;X=\left(I_2-A^2\right)A^{-1}$$

Efectuamos las operaciones:

$$X=\left(I_2-A^2\right)A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-4&0\end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita: Halla una matriz Y tal que $A^3+3Y=B\cdot B^t$.

$$A^3+3Y=B\cdot B^t\;\rightarrow\;3Y=B\cdot B^t-A^3\;\rightarrow\;Y=\frac{1}{3}\cdot\left(B\cdot B^t-A^3\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&4\\-2&6\end{pmatrix}$$

d) Por inducción llegamos a que

$$n\text{ par}\quad\rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1&0\\-2n&1\end{pmatrix}\xrightarrow{n=100}A^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\-200&1\end{pmatrix}$$

$$n\text{impar}\quad\rightarrow A^n=\begin{pmatrix}-1&0\\2n&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{n=111}A^{111}=\begin{pmatrix}-1&0\\222&-1\end{pmatrix}$$

e) Teniendo en cuenta que el determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$Z^2AZ^{-1}=BB^t\rightarrow Z^2A=BB^t\cdot Z\rightarrow|Z|^2\cdot|A|=|BB^t|\cdot|Z|\rightarrow|Z|=|BB^t|:|A|=\frac{14}{1}=14$$

f) Queremos encontrar una matriz M tal que $BM=MB$.

Si existe BM, el número de filas de M debe coincidir con el de columnas de B: M debe tener 3 filas.

Si existe MB, el nº de columnas de M debe coincidir con el de filas de B: M debe tener 2 columnas.

Tendríamos así que BM es 2×2 y que MB es 3×3. Pero entonces $BM\neq MB$.

Concluimos así que no existe ninguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2:

a) Calculemos

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to A^3 + \mathrm{I} = \mathrm{O}$$

b) Una matriz tiene inversa sólo si su determinante no es cero:

$$\det(A + x\mathrm{I}) = x^3 - 1 \;\to\; x^3 - 1 = 0 \;\to\; x = \sqrt[3]{1} = 1$$

De ahí deducimos que la matriz $A + x\mathrm{I}$ sólo tiene inversa cuando $x \neq 1$.

Para $x = 0$ se trata de calcular la inversa de A. Observemos que

$$A^3 = -\mathrm{I} \to -A^2 \cdot A = \mathrm{I} \to -A^2 = A^{-1}$$

Así

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 11 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Teniendo en cuenta que $A^3 = -\mathrm{I}$:

$$A^{20} = A^{18}A^2 = \left(A^3\right)^6 A^2 = (-\mathrm{I})^6 A^2 = A^2$$

EJERCICIO 3:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & 2 \\ 1 + 2a + 6 & = & 9 \\ -1 + 2b + 3c & = & 4 \end{array} \right| \to a = 1\,, 2b + 3c = 5$$

Como el rango de A es 2, su determinante es cero:

$$|A| = 0 \to 7b - 4c - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas condiciones obtenemos:

$$a = 1\,, b = \frac{23}{29}\,, c = \frac{33}{29}$$

EJERCICIO 4:

a) El producto de la matriz de coeficientes C por la matriz dada es la matriz identidad. Así, multiplicando la primera fila de C por la primera columna de la matriz dada debemos obtener 1:

$$a + 2 + 0 - 1 = 1 \;\to\; a = 0$$

Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = 1 - a^2 \xrightarrow{|C|=0} -a^2 + 1 = 0 \to a = \pm 1$$

Caso 1: $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

Caso 2: $a = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

Caso 3: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio previo deducimos que es $a = 1$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y = & 1 + z \\ -x - y = & -1 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \,, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \,, \lambda \right)$$

EJERCICIO 5:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 0 \end{array}\right)$$

Calculemos el determinante de la matriz ampliada y veamos cuándo es cero:

$$\det(A) = 2m^3 - 2m^2 = 2m^2(m-1) = 0 \rightarrow m = 0\,,\; m = 1$$

Caso 1: $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

La ampliada tiene rango 3 pero la matriz de coeficientes no puede ser 3 pues sólo tiene dos columnas:

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \neq \mathrm{rg}(C)$$

Es incompatible

Caso 2: $m = 1$

El sistema queda reducido a

$$S : \{x + y = 1\,,\; x + y = 1\,,\; x + y = 0\}$$

La tercera ecuación es claramente incompatible con las dos primeras.

Caso 3: $m = 0$.

El sistema queda reducido a No encontramos ningún menor de orden 2 distinto de cero pero por lo menos

$$S : \{x = 0\,,\; y = 0\,,\; 0 = 0\}$$

Claramente compatible determinado con solución $x = 0\,, y = 0$.

EJERCICIO 6:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 4 & -k & 6 \\ 1 & k & -1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4\;,\;\; \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\;,\;\; \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} k & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 6$$

Caso 1: $k \neq \pm 2$

Como $\Delta_2^1 \neq 0$:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Caso 2 $k = -2$.

Todos los orlados en C son cero pero el orlado último en A, con la columna de los términos independientes no. Así que es incompatible pues

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Caso 3: $k = 2$.

Todos los orlados son cero, por ello:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 1 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

Si $k = -2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k = 2$ se trata de planos coincidentes, esto es, son dos ecuaciones de un mismo plano.

c) Pongamos $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$:

$$\begin{cases} k + 4 - 0 \to k = 2 \\ 1 + k - 0 = 3 \to k = 2 \end{cases}$$

Como vemos, es solución cuando $k = 2$.

EJERCICIO 7:

Sean

x el número de barriles adquiridos al primer suministrador

y el número de barriles adquiridos al segundo suministrador

z el número de barriles adquiridos al tercer suministrador

El total de barriles es 200 000: $x + y + z = 200000$ [1]

El total de dinero es 4 800 000 dólares: $20x + 25y + 30z = 4800000$ [2]

Lo adquirido al segundo es el 25% de lo comprado a los otros dos: $y = \frac{1}{4}(x + z)$ [3]

Si pasamos el cuatro multiplicando al primer miembro obtenemos $x + z = 4y$. Y sustituyendo en [1]:

$$x + y + z = 200000 \xrightarrow[x+z=4y]{} 4y + y = 200000 \to y = 40000$$

Ahora las ecuaciones [1] y [2] quedan:

$$\begin{cases} x + \ \ z &= 160000 \\ 2x + 3z &= 380000 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema que resulta, obtenemos

$$x = 100000\,,\, z = 60000$$

Compró 100 000 , 40 000 y 60 000 barriles a cada suministrador, respectivamente.