Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Recuperación Cálculo Integral

EJERCICIO 1: [2,5]

Halla la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3 \arctan x$$

cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Obtén la integral

$$I = \int \frac{2}{3 + \sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t = \sqrt[3]{x+1}$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{5x}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + 2 - \mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

sabiendo que $f(\pi) = -1$.

I+II: 3, 5, 6, 8 → Todos con valoración igual a 2,5

Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas II – Recuperación Cálculo Integral

EJERCICIO 5: [2,5]

a) [1,75] Calcula

$$\int_0^2 (x-1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

b) [0,75] Razona si la integral definida anterior es el área determinada por la gráfica de la curva $y=(x-1)\,\mathrm{e}^{2x}$ con el eje de abscisas en el intervalo $[0\,,2]$.

EJERCICIO 6: [2,5]

Sean $f:[0\,,+\infty)\;\to\;\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\;\to\;\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f\,(x)=4\sqrt{x}\quad,\quad g\,(x)=\frac{1}{2}x^2$$

a) [0,75] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) [1,75] Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 7: [2,5]

a) [1] Halla la ecuación de la recta tangente, para $x=1$, a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\;\to\;\mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f\,(x)=\int_1^x \frac{t-3}{1+t^6}\,\mathrm{d}t\quad,\quad x\in\mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_1^3 |x^2-4|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 8: [2,5]

Consideremos las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2\quad,\quad g(x)=2a^2-x^2$$

a) [0,5] Dibuja sus gráficas para el caso $a=1$.

b) [2] Halla $a>0$ sabiendo que la superficie comprendida entre sus gráficas es igual a $72\,u^2$.

I+II: 3, 5, 6, 8 → Todos con valoración igual a 2,5

EJERCICIO 1:

Integramos primero por partes, usando la función trigonométrica para derivar y 1 para integrar.

$$\begin{aligned} \int 3 \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x &= 3x \arctan x - \int 3x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = 3x \arctan x - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= 3x \arctan x - \frac{3}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C \end{aligned}$$

Llamando F a la primitiva buscada:

$$F(0) = 1 \ \rightarrow \ 0 + C = 1 \rightarrow C = 1$$

Queda

$$F(x) = 3x \arctan x - \frac{3}{2} \ln\left(1+x^2\right) + 1$$

EJERCICIO 2:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$I = \int \frac{2}{3+\sqrt[3]{x+1}} \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x+1 = t^3 \\ dx = 3t^2 \mathrm{d}t \end{array} \right\} = \int \frac{2}{3+t} \cdot 3t^2 \mathrm{d}t = \int \frac{6t^2}{t+3} \, \mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(6t^2\right) : (t+3) \ \rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} c = 6t - 18 \\ r = 36 \end{array} \right.$$

Así:

$$I = \int \left(6t - 18 + \frac{36}{t+3} \right) \mathrm{d}t = 3t^2 - 18t + 36 \ln|t+3| + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt[3]{x+1}$:

$$\int \frac{2}{3+\sqrt[3]{x+1}} \, \mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 18\sqrt[3]{x+1} + 36 \ln|3+\sqrt[3]{x+1}| + C$$

EJERCICIO 3:

Observemos que el grado del numerador es menor que el del denominador. Factorizamos el denominador e intentamos descomponer en fracciones simples:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \ \rightarrow \ \frac{5x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$5x = a(x-2) + b(x-1) \ \longrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 1 \rightarrow 5 = -a \rightarrow a = -5 \\ \text{si } x = 2 \rightarrow 10 = b \rightarrow b = 10 \end{array} \right.$$

Resulta:

$$I = \int \frac{-5}{x-1} \, \mathrm{d}x + \int \frac{10}{x-2} \, \mathrm{d}x = -5 \ln|x-1| + 10 \ln|x-2| + C$$

EJERCICIO 4:

Integrando cada trozo: $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)+a & \text{si} \quad x\geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}+b & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Sabemos que $f(\pi)=-1$: $f(\pi)=-1 \rightarrow 0+a=-1 \rightarrow a=-1$

Como es derivable en $x=0$ es continua en $x=0$: $f(0-)=f(0+) \rightarrow 0+a=\dfrac{1}{2}+b \rightarrow b=-\dfrac{3}{2}$

Definitivamente nos queda $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)-1 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

EJERCICIO 5:

a) Calculamos la primitiva:

$$\int (x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(x-1)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}-\int\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{(x-1)}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}+C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2x-3}{4}\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathrm{e}^4+3}{4}$$

b) Para hallar el área necesitamos conocer el signo de la función en el intervalo:

$$(x-1)\,\mathrm{e}^x=0 \xrightarrow{\mathrm{e}^x>0} x-1=0 \rightarrow x=1$$

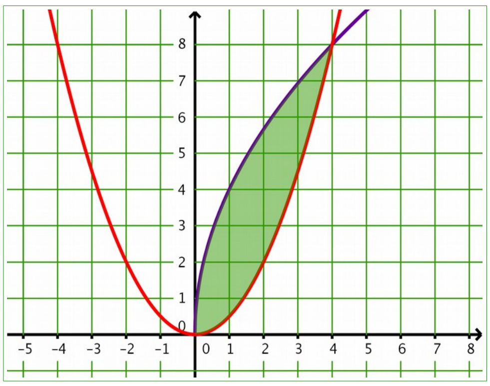
Es fácil comprobar ahora que f negativa en $(0\,,1)$ y positiva en $(1\,,2)$, así el área indicada no es la integral en el intervalo. El área solicitada viene dada por:

$$a(\mathscr{R})=-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 6:

a) Igualamos para averiguar dónde se cortan:

$$\frac{1}{2}x^2=4\sqrt{x} \rightarrow x^2=8x \rightarrow x^4=64x \rightarrow x\left(x^3-64\right)=0 \rightarrow x=0\,,x=\sqrt[3]{64}=4$$



Las gráficas son una parábola y una rama de parábola. Con un par de simples tablas de valores obtenemos sus gráficas.

b) Observamos que el recinto está entre $x=0$ y $x=4$ y que la gráfica de f está sobre la de g. Así, el área del recinto comprendido entre ambas viene dado por:

$$\int_0^4 (f-g)=\left[4\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=4}=\frac{32}{3}\,\mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 7:

a) Observemos que el integrando es continuo: es una fracción racional con denominador siempre positivo. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{x-3}{x^6+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

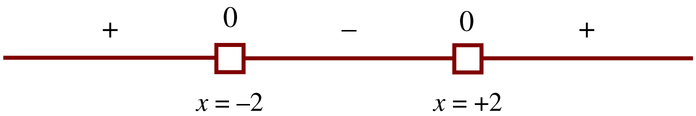
Observando que

$$f(1) = \int_1^1 \frac{t-3}{1+t^6}\,\mathrm{d}t = 0$$

Tenemos que la recta tangente tendrá por ecuación:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \to y - 0 = -1 \cdot (x-1) \to y = -x+1$$

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. El signo de x^2-4 (interior del valor absoluto) es:



Resulta así:

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2 < x \le +2 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x > +2 \end{cases}$$

Así que separamos la integral entre $x=1$ y $x=3$ en dos:

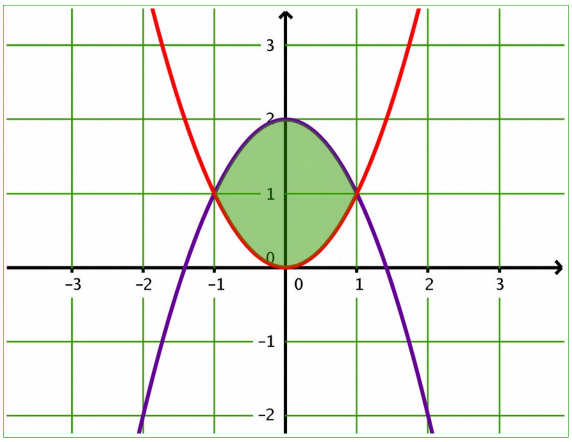
$$\int_1^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (-x^2+4)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-4)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^3 |x^2-4|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{x=1}^{x=2} + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{16}{3} - \frac{11}{3} - 3 + \frac{16}{3} = 4$$

EJERCICIO 8:

a) Las gráficas son un par de parábolas: una convexa y otra cóncava. Con un par de simples tablas de valores las dibujamos:



b) Igualamos para averiguar dónde se cortan $y = x^2$ e $y = 2a^2 - x^2$:

$$x^2 = 2a^2 - x^2 \;\to\; x^2 = a^2 \;\to\; x^2 = \pm\sqrt{a^2} \to\; x = \pm a$$

Observamos que el recinto es simétrico respecto del eje Y y que la parábola cóncava cae sobre la convexa. Así calculamos:

$$\int_0^a \left(2a^2 - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[2a^2 x - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

Y de ahí deducimos que la mitad del área es:

$$\frac{4a^3}{3} = \frac{72}{2} \;\to\; a^3 = 27 \;\to\; a = \sqrt[3]{27}$$

Obtenemos así que es $a = 3$.