Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Cálculo Integral – 14/03/2016	

EJERCICIO 1: [2]

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\;\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x^2\left(x^3+1\right)^5\mathrm{d}x$

EJERCICIO 2: [2]

Sea $g:(-1\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\ln\left(x+1\right)$$

Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 3: [2]

Obtén la integral

$$I=\int\frac{5x}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x=t^2$.

EJERCICIO 4: [2]

Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int\frac{2}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5: [2]

Halla la expresión de la función $f:\mathbb{R}\;\to\;\mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x)=\begin{cases}3\,\mathrm{e}^{2x} & \text{si}\quad x\le 0\\ \operatorname{sen}(5x)+3 & \text{si}\quad x>0\end{cases}$$

y cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

I+II: 3, 4, 6, 7, 9

Nombre:____ ***Curso***:_____
Matemáticas II – Cálculo Integral – 14/03/2016

EJERCICIO 6: [2,5]

a) [2] Calcula la integral definida

$$\int_0^\pi 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

b) [0,5] Razona si dicha integral proporciona el área del recinto determinado por la curva definida por la curva $y = 2x\cos x$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \pi$.

EJERCICIO 7:

a) [0,5] Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2\sqrt{x}$ para $x = 4$.

b) [0,75] Dibuja el recinto delimitado por dicha curva, la tangente anterior y el eje de ordenadas.

c) [1,25] Halla el área de dicho recinto.

EJERCICIO 8:

a) [1] Calcula las coordenadas de los extremos, si los hubiese, de la función f definida por

$$f(x) = \int_2^x \frac{t-2}{3+\cos(\pi t)}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 9: [2,5]

Determina el valor positivo de a para el que el área del recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = ax$ es 36.

I+II: 3, 4, 6, 7, 9

EJERCICIO 1:

a) Es una integral compuesta de tipo exponencial con $u = x^2$:

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 2x$:

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,\mathrm{arcsen}(2x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos(3x)$:

$$\int \cot(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(3x)}{\mathrm{sen}(3x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\ln|\mathrm{sen}(3x)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = x^3 + 1$:

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^5\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3+1\right)^5\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+1)^6}{6} + C = \frac{1}{18}(x^3+1)^6 + C$$

EJERCICIO 2:

Integramos primero por partes, donde x es la parte a integrar y el logaritmo la parte a derivar:

$$I = \int 1\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x+1) - \int x\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Ahí tenemos ahora una integral racional, donde haciendo la división:

$$(x) : (x+1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 1 \\ r = -1 \end{cases}$$

Así:

$$I = x\ln(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

Llamando G a la primitiva buscada:

$$G(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 + C = 0 \rightarrow C = 0$$

Queda

$$G(x) = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{5t^2}{2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{10t^3}{t+2}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(10t^3\right) : (t+2) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 10t^2 - 20t + 40 \\ r = -80 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(10t^2 - 20t + 40 + \frac{-80}{t+2}\right) \mathrm{d}t = \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 40t - 80\ln|t+2| + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{5x}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\sqrt{x}^3 - 10x + 40\sqrt{x} - 80\ln|\sqrt{x}+2| + C$$

EJERCICIO 4:

Observemos que el grado del numerador es menor que el del denominador y que

$$x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x\,(x+2)\,(x-2)$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x\,(x+2)\,(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2 = a\,(x+2)\,(x-2) + bx\,(x-2) + cx\,(x+2) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x = 0 \rightarrow 2 = -4a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ \text{si } x = -2 \rightarrow 2 = 8b \rightarrow b = \frac{1}{4} \\ \text{si } x = 2 \rightarrow 2 = 8c \rightarrow c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Resulta:

$$I = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

Definitivamente:

$$I = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

EJERCICIO 5:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ -\frac{1}{5}\cos(5x) + 3x + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{3}{2} + a = 0 \;\rightarrow\; a = -\frac{3}{2}$$

Al existir derivada para $x=0$, debe ser continua en $x=0$:

$$f(0-)=f(0+)\ \rightarrow\ 0=-\frac{1}{5}+b\rightarrow b=\frac{1}{5}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x\leq 0\\ -\dfrac{1}{5}\cos(5x)+3x+\dfrac{1}{5} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

EJERCICIO 6:

a) Primero hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int 2x\cos x\,\mathrm{d}x=2x\operatorname{sen}x-\int 2\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=2x\operatorname{sen}x+2\cos x+C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[2x\operatorname{sen}x-2\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi}=-2-2=-4$$

b) Observemos que la función $y=x\cos x$ en el intervalo $(0\,,\pi)$ tiene el mismo signo que la función coseno: es positiva en $\left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y negativa en $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right)$. Por ello dicha integral definida no proporciona el área. El área es:

$$\mathscr{A}=\int_0^{\pi/2}2x\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi}2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

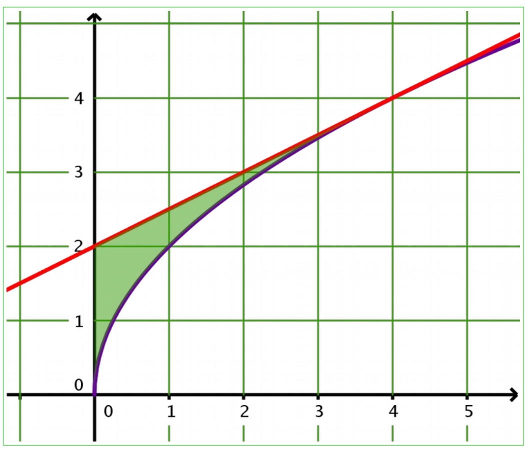
EJERCICIO 7:

a) Derivamos

$$y=2\sqrt{x}\ \rightarrow\ y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Y aplicamos la fórmula de la tangente:

$$y-f\,(4)=f'\,(4)\,(x-4)\ \rightarrow\ y-4=\frac{1}{2}\cdot(x-4)\ \rightarrow\ y=\frac{1}{2}x+2$$



b) A la izquierda se ha dibujado el recinto.

c) El área viene dada por:

$$a(\mathfrak{R})=\int_0^4\left(\frac{1}{2}x+2-2x^{1/2}\right)\mathrm{d}x$$

Ahora, aplicamos la Regla de Barrow y simplificamos:

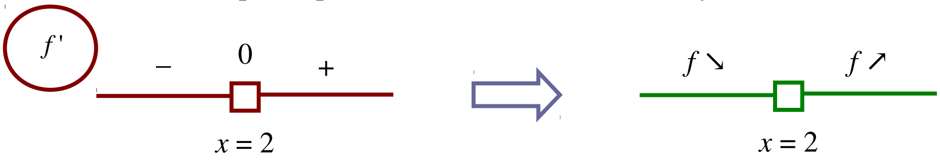
$$a(\mathfrak{R})=\left[\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_{x=0}^{x=4}=4+8-\frac{32}{3}=\frac{4}{3}\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 8:

a) Observemos que el integrando es continuo: es una fracción racional con denominador siempre positivo. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{x-2}{3+\cos(\pi x)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Como el denominador siempre es positivo (el coseno está entre -1 y 1), el estudio de signo es sencillo:



Y calculando el valor para $x = 2$:

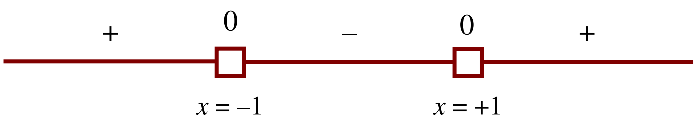
$$f(2) = \int_2^2 \frac{t-2}{3+\cos(\pi t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

En $(2\,,0)$ la función presenta un mínimo (absoluto) y no tiene un valor máximo.

b) Para calcular una integral de un valor absoluto, hay que expresar el integrando como una función a trozos. Calculemos los ceros del interior del valor absoluto:

$$x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$$

El signo de $x^2 - 1$ es:



Resulta así:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 < x \leq +1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x > +1 \end{cases}$$

Así que separamos la integral en dos:

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

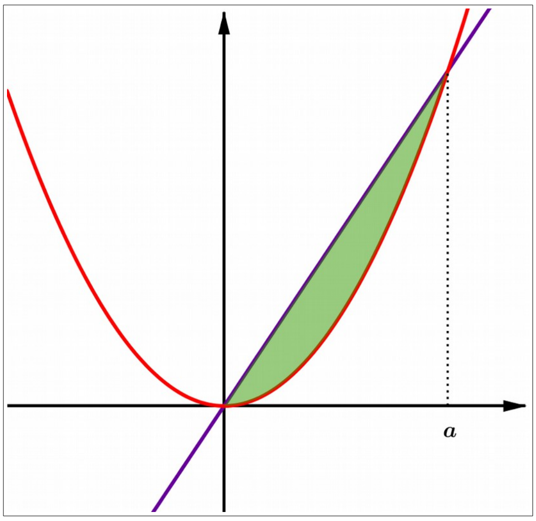
$$\int_0^2 |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

EJERCICIO 9:

Es fácil comprobar dónde se cortan la parábola y la recta:

$$x^2 = ax \;\to\; x^2 - ax = 0 \;\to\; x(x-a) = 0 \;\to\; x = 0\,, x = a$$

La gráfica de $y = x^2$ es una parábola muy fácil dibujarla (convexa con vértice en el origen de coordenadas) y la recta $y = ax$ es una recta creciente (porque su pendiente es $a > 0$) que pasa por el origen de coordenadas. Así que un esbozo de la gráfica de ambas será como se muestra a continuación:



El área de ese recinto viene dada por:

$$36 = \int_0^a \left(ax - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Luego:

$$\frac{a^3}{36} = 6 \;\rightarrow\; a^3 = 216 \;\rightarrow\; a = \sqrt[3]{216}$$

Obtenemos así que es $a = 6$.