Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Recuperación Cálculo Diferencial	

EJERCICIO 1: [3]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 1 \\ \ln x - x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1,5] Halla a, b y c para que sea continua y tenga un extremo relativo en el punto $(-1\,,-5)$.

b) [0,75] ¿Es derivable en todo punto para dichos valores?

c) [0,75] Calcula la ecuación de la recta tangente a su gráfica para $x=\mathrm{e}$.

EJERCICIO 2: [3]

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\mathrm{e}^x\,(2x-6)$$

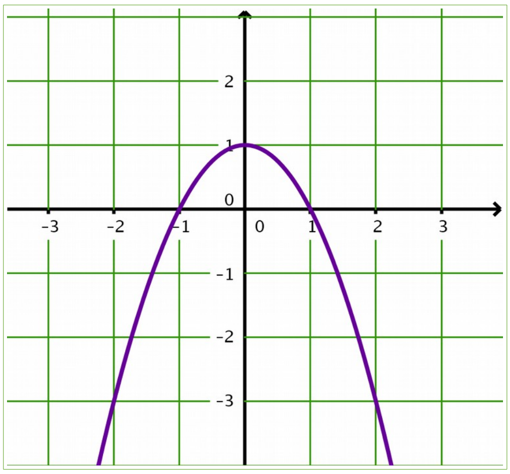
a) [1] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) [1] Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

c) [1] Determina las coordenadas, si los hubiese, de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 3: [1,5]

A continuación se muestra la gráfica de la derivada de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Estudia razonadamente:



a) [0,5] La monotonía de la curva $y=f(x)$, señalando dónde se alcanzan los extremos relativos.

b) [0,5] La curvatura de $y=f(x)$, obteniendo los puntos de inflexión.

c) [0,5] ¿Puede ser la recta $y=3x+3$ tangente a la curva $y=f(x)$?

EJERCICIO 4: [2,5]

En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y=-x^2+3$.

Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

EJERCICIO 1:

a) La función sólo puede ser discontinua para x=1 (separa-fórmulas). Estudiemos en este punto:[1,5] Halla a, b y c para que sea continua y tenga un extremo relativo en el punto $(-1\,,-5)$.

Valor: $f\,(1) = a + b + c$

Límites: $\lim\limits_{x \to 1} f\,(x) \begin{cases} f\,(1-) = a + b + c \\ f\,(1+) = 0 - 1 = -1 \end{cases}$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$a + b + c = -1 \text{ [i]}$$

Por otro lado, si en $(-1\,,-5)$ hay un extremo relativo, se cumplen dos condiciones:

La derivada se anula para $x = -1$:

$$f'\,(-1) = 2a\,(-1) + b = 0 \;\rightarrow\; -2a + b = 0 \text{ [ii]}$$

El punto $(-1\,,-5)$ está en la gráfica:

$$f\,(-1) = -5 \;\rightarrow\; a - b + c = -5 \text{ [iii]}$$

Con [i] – [ii] obtenemos $b = 2$, sustiyendo esto en [ii] nos da $a = 1$ y de [i] sacamos ya $c = -4$. Así:

$$a = 1\,, b = 2\,, c = -4$$

b) Para $x \neq 1$ podemos derivar directamente. Y como es continua, hallamos de ahí las derivadas laterales:

$$f'\,(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x > 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'\,(1-) = 2 + 2 = 4 \\ f\,'(1+) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Para $x = 1$ no es, pues, derivable, pues no coinciden.

c) La ecuación de la recta tangente a su gráfica para $x = \mathrm{e}$.

$$y - f\,(\mathrm{e}) = f'\,(\mathrm{e})\,(x - \mathrm{e}) \;\rightarrow\; y - (1 - \mathrm{e}) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) \cdot (x - \mathrm{e}) \rightarrow y = \frac{1 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} x$$

EJERCICIO 2:

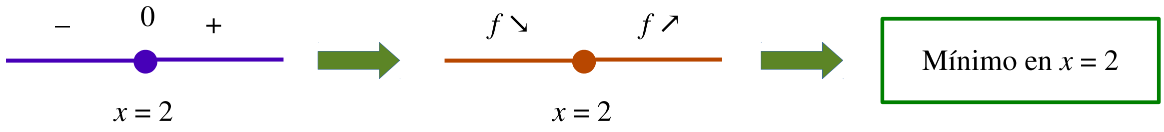
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}^{+\infty}\,(+\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f\,(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 6}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-\,\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{2}{-\infty}\right] = 0$$

b) Derivamos

$$f'\,(x) = \mathrm{e}^x\,(2x - 4)$$

Y estudiamos los ceros e intervalos de signo de la derivada:

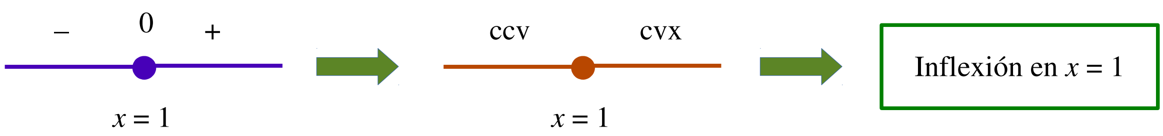


Tenemos así un único extremo: un mínimo absoluto en $\left(2\,,-2\,\mathrm{e}^2\right)$.

c) Derivamos dos veces

$$f''(x) = \mathrm{e}^x (2x - 2)$$

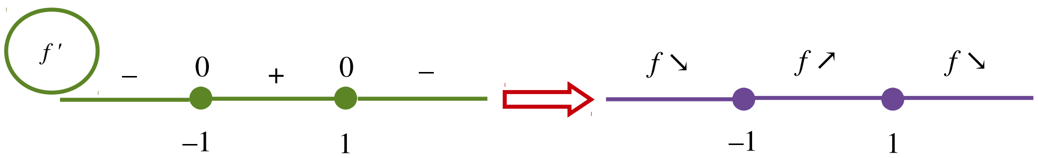
Y estudiamos los ceros e intervalos de signo de la derivada segunda:



Tenemos así un único punto de inflexión: $(1\,, -4\,\mathrm{e})$.

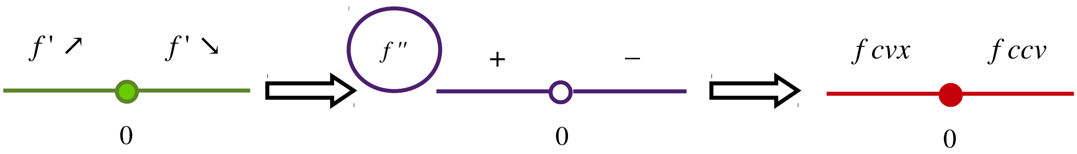
EJERCICIO 3:

a) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Observemos que para $x = -1$ la función f tiene un mínimo relativo y que para $x = 1$ presenta un máximo relativo.

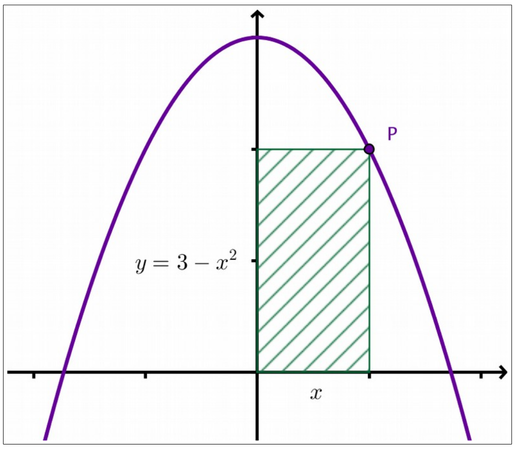
b) De la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta punto de inflexión para $x = 0$.

c) La pendiente de la recta dada es $m = 3$. Pero la derivada es como máximo 1, así que la pendiente nunca será igual a la derivada y por ello no puede ser tangente.

EJERCICIO 4:



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Si llamamos x a la base del rectángulo e y a la altura, la superficie es:

$$S = x \cdot y$$

[Ligadura]

Observemos que el vértice superior derecho es un punto de la parábola, por ello su ordenada es

$$y = 3 - x^2$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u> la función

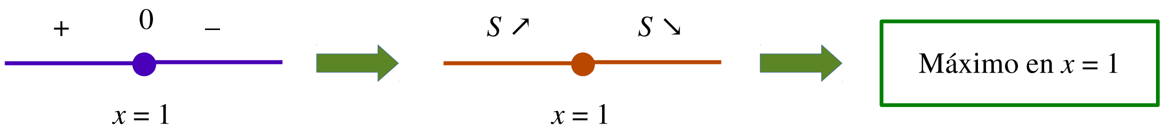
$$S(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3 \quad , \quad 0 < x < \sqrt{3}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \to 3x^2 = 3 \to x = 1$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Concluimos que el rectángulo tiene de base 1 y de altura 2, siendo su área igual a 2.