Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Recuperación Cálculo Diferencial	

EJERCICIO 1:

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo punto.

EJERCICIO 2:

Sea la función f definida mediante

$$f(x)=3x+\frac{12}{x+1} \quad , \quad x\neq -1$$

a) [1,25] Obtén razonadamente sus asíntotas.

b) [1,25] Averigua los extremos de la función en el intervalo $[0\,,2]$.

EJERCICIO 3:

Consideremos la función dada por $f:[0\,,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx$$

a) [1,25] Obtén los valores de a y b sabiendo que $(1\,,-1)$ es un punto de inflexión de su gráfica.

b) [1,25] Para $a=-3$ y $b=1$, halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica paralela a $10x-y+1=0$.

EJERCICIO 4:

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros /metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

Todos los ejercicios tienen igual valoración.

EJERCICIO 1:

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas). Veamos:

Valor: $f(0) = 0 + b = b$

Límites: $f\,(0-) = \lim\limits_{x \to 0-} (ax + b) = b$

$$f\,(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{2\cos(2x)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$b = 2$$

Derivabilidad: podemos derivar directamente si $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si es continua, puede ser derivable con:

$f'\,(0-) = a$

$$f\,(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{2x\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{2\cos(2x) - 4x\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)}{2x} = \lim_{x \to 0+} (-2\operatorname{sen}(2x)) = 0$$

La función es derivable para $x = 0$ cuando las derivadas laterales coinciden:

$$a = 0$$

Obtenemos:

$$a = 0\,,\; b = 2$$

EJERCICIO 2:

a) <u>Asíntotas verticales</u>: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Comprobemos si hay salto infinito:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 3x + 12}{x + 1} = \left[\frac{12}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que hay una asíntota vertical: $x = -1$.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 + 3x + 12}{x + 1} \overset{*}{=} \pm\infty$ (* Regla de los grados)

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicua</u>: puede haber una oblicua $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 + 3x + 12}{x^2 + x} \overset{*}{=} 3$ (* Regla de los grados)

$n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 3x + 12}{x + 1} - 3x\right) \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12}{x + 1} \overset{*}{=} 0$ (* Regla de los grados)

Concluimos que hay una asíntota oblicua: $y = 3x$ para $x \to \pm\infty$.

b) La función es derivable en cada punto del intervalo compacto $[0\,,2]$, así los candidatos son los puntos inicial, final y aquellos en que la derivada se anula (posibles extremos relativos interiores):

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x-9}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow 3x^2+6x-9=0 \rightarrow x=-3\,, x=1$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	0		1		2
y	12	↘	9	↗	10

Vemos que es $(1\,,9)$ el mínimo absoluto y $(0\,,12)$ el máximo absoluto.

EJERCICIO 3:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3+ax^2+bx+c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2+2ax \;\rightarrow\; f''(x) = 6x+2a$$

Hay inflexión en $(1\,,-1)$: de ahí se deducen dos cosas:

Para $x=1$ hay inflexión así:

$$f''(1)=0 \;\rightarrow\; 6+2a=0 \;\rightarrow\; a=-3$$

El punto $(1\,,-1)$ está en la gráfica:

$$f\,(1)=-1 \;\rightarrow\; 1-3-b=-1 \;\rightarrow\; b=1$$

b) Veamos la pendiente de la recta dada:

$$r: 10x-y+1=0 \;\rightarrow\; y=10x+1 \rightarrow m=10$$

La pendiente es igual a la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(x)=m \;\rightarrow\; 3x^2-6x+1=10 \;\rightarrow\; \rightarrow\; x=-1\,, x=3$$

Pero como el dominio es $[0\,,4]$, sólo es válida $x_0=3$. La tangente es:

$$y-f\,(3) = f'\,(3)\,(x-3) \;\rightarrow\; y-3 = 10\cdot(x-3) \rightarrow y=10x-27$$

EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamamos x a la base (junto al camino) e y a la altura de esa parcela rectangular. Tenemos que maximizar la superficie:

$$S = x\cdot y$$

[Ligadura]

Como el costo total asciende a 28800 euros:

$$80x+10x+20y=28800 \rightarrow 9x+2y=2880 \rightarrow y=1440-4.5x$$

[Función]

Queremos maximizar

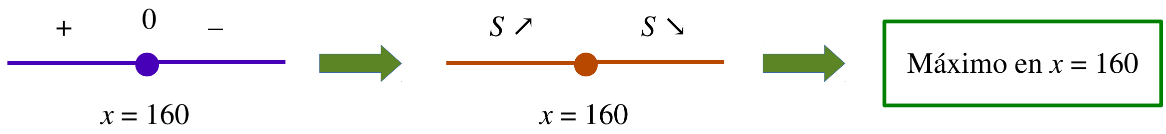
$$S = x\cdot(1440-4.5x) = 1440x-4.5x^2$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 1440 - 9x = 0 \rightarrow x = 160$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



Luego el campo rectangular tiene 160 m de ancho (junto al camino) 1440 – 4.5 · 160 = 720 m de largo.