Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Geometría del espacio – 23/05/2016	

EJERCICIO 1:

Consideremos el punto y el plano dados por

$$P\,(-1\,,2\,,1) \quad , \quad \pi : 2x - 2y + z = 4$$

a) [1,25] Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de π.

b) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 2:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P\,(1\,,0\,,1) \quad , \quad r : \left\{ \begin{aligned} x - 2z &= 4 \\ y &= 3 \end{aligned} \right.$$

a) [1,25] Determina la proyección del punto sobre la recta.

b) [1,25] Obtén la ecuación general del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

EJERCICIO 3:

Consideremos la recta y el plano dados por

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y}{a} = z + 1 \quad , \quad \pi : 2x + y - 2z - 4 = 0$$

a) [1,25] Estudia su posición relativa.

b) [1,25] Para $a = 2$, calcula los puntos sobre la recta que distan dos unidades del plano.

EJERCICIO 4:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \left\{ \begin{aligned} y - 2x &= -2 \\ z &= -1 \end{aligned} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= a \\ z &= \lambda \end{aligned} \right.$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas.

b) [1,25] Para $a = -1$, calcula la distancia que separa las dos rectas.

EJERCICIO 1:

a) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de r con π (la proyección de P en π). Por último hallaremos el simétrico P' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q.

La recta r pasa por $P\,(-1\,,2\,,1)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n}=(2\,,-2\,,1)$:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$r\ \mapsto\ \pi:-2+4\lambda-4+4\lambda+1+\lambda=4\ \to\ \lambda=1$$

Es:

$$Q=(-2\,,0\,,-2)$$

Usando el punto medio::

$$\frac{P+P'}{2}=Q\ \to\ P'=2Q-P\ \to\ P'=(3\,,-2\,,3)$$

b) Primero obtengamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:

Corte eje X: $y=z=0\ \to\ x=2\ \to\ A\,(2\,,0\,,0)\,.$

Corte eje Y: $x=z=0\ \to\ y=-2\ \to\ B\,(0\,,-2\,,0)\,.$

Corte eje Z: $x=y=0\ \to\ z=4\ \to\ C\,(0\,,0\,,4)\,.$

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(-8\,,8\,,-4)$$

Porque el área pedida es

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2+8^2}=6\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 2:

a) El punto pedido Q es la intersección del plano perpendicular a la recta por el punto P (pie de la perpendicular). Pasamos primero la recta a paramétricas.

$$r:\left\{\begin{array}{r} x-2z=4 \\ y=3 \end{array}\right.\ \xrightarrow{z=\lambda}\ r:\left\{\begin{array}{l} x=4+2\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

El plano π pasa por $P\,(1\,,0\,,1)$ y tiene como vector normal $\vec{n}=\vec{v}_r=(2\,,0\,,1)$:

$$\pi:2\cdot(x-1)+1\cdot(x-1)=0\ \to\ 2x+z=3$$

Ahora sustituimos para hallar la intersección de este plano y la recta:

$$r\ \mapsto\ \pi:8+4\lambda+\lambda=3\ \to\ \lambda=-1$$

Es:

$$Q=(2\,,3\,,-1)$$

b) Vamos a obtener un punto y dos vectores directores. Como el punto $P_r = (4\,,3\,,0)$ de la recta está en el plano, tenemos así

Punto: $P\,(1\,,0\,,1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{PP_r} = (3\,,3\,,-1)\ ,\ \vec{v}_r = (2\,,1\,,0)$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -3x+5y+6z-3=0$$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la condición de paralelismo de recta y plano:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (2\,,1\,,-2)\cdot(2\,,a\,,1)=0 \;\rightarrow\; 4+a-2=0 \;\rightarrow\; a=-2$$

Tenemos así:

Si es $a \neq -2$ entonces s y π son secantes (en un punto).

Si es $a = -2$ la recta o es paralela o está contenida en el plano. Para salir de dudas, sustituimos un punto cualquiera de la recta en la ecuación del plano:

$$P_r = (0\,,0\,,-1) \;\mapsto\; \pi : 2-4 \neq 0$$

Como el punto no está en el plano, la recta es paralela al plano.

b) [Punto genérico] Pasamos la recta a paramétricas y vemos así que el punto que buscamos en la recta es

$$Q = (2t\,,2t\,,-1+t)$$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos el parámetro:

$$\mathrm{d}\,(Q\,,\pi) = \frac{|4t+2t+2-2t-4|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{|4t-2|}{3} = 2 \;\rightarrow\; |4t-2| = 6$$

Para que un valor absoluto resulte ser 6, su argumento debe ser 6 o -6. Por lo tanto:

$$|4t-2| = 6 \;\rightarrow\; \left| \begin{array}{lllll} 4t-2=+6 & \rightarrow & t=2 & \rightarrow & Q_1\,(4\,,4\,,1) \\ 4t-2=-6 & \rightarrow & t=-1 & \rightarrow & Q_2\,(-2\,,-2\,,-2) \end{array} \right.$$

EJERCICIO 4:

a) Veamos primero si los vectores directores son paralelos:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1\,,2\,,-0) \\ \vec{v}_s = (1\,,0\,,1) \end{array} \right\} \;\rightarrow\; \frac{1}{1} \neq \frac{2}{0} \;\rightarrow\; \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Tenemos así que bien son secantes, bien se cruzan. Tomamos $P_r = (0\,,-2\,,-1)$ y $P_s = (0\,,a\,,0)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & a+2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4-a \;\rightarrow\; -4-a=0 \;\rightarrow\; a=-4$$

Tenemos así:

Si es $a \neq -4$ entonces las rectas se cruzan.

Si es $a = -4$ entonces las rectas son secantes (en un punto, claro).

b) Para $a = -1$ sabemos que se cruzan y así podemos hallar la distancia usando la fórmula (altura prisma igual a volumen entre superficie base):

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \frac{\left|\;\left[\overrightarrow{P_rP}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_r\,,\right]\;\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$\left[\overrightarrow{P_rP}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s\right] \overset{[a]}{=} -4+1=-3$

$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1\,,2\,,0) \times (1\,,1\,,1) = (2\,,-1\,,-2)$

Y aplicando la fórmula:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1 \text{ u}$$