Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 13/04/2016	

EJERCICIO 1: [5]

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & (3+\alpha)\,z & = & 2 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Resuelva matricialmente el sistema cuando la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de α?

b) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro α.

c) [1] Para un valor de α el sistema tiene al menos dos soluciones. Resuélvalo en este caso.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos el sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} kx + \ \ y = 1 \\ x + ky = 1 \\ x + \ \ y = k \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

b) [0,5] Resuélvalo para $k = 1$.

EJERCICIO 3: [3]

Mezclando tres productos, digamos *A*, *B* y *C*, debemos obtener 10 kg. de pienso que contenga 19 unidades de glúcidos y 12 unidades de lípidos.

Sabiendo que cada kilo de *A* contiene una unidad de glúcidos y dos unidades de lípidos, que cada kilo del producto *B* contiene dos unidades de glúcidos y una unidad de lípidos, y que cada kilo del producto *C* contiene cuatro unidades de glúcidos y nada de lípidos, ¿cuántos kilos de cada producto debemos poner?

EJERCICIO 1:

a) Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Si sustituimos en la primera ecuación obtenemos:

$$6\alpha + 4 + 3 \cdot 6 = 4 \ \to \ \alpha = -3$$

También podríamos haber hallado α sin resolver usando que es $C \cdot M =$ I.

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = \alpha^2 + 6\alpha + 8 \ \xrightarrow{|C|=0} \ \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0 \to \alpha = -4\,, \alpha = -2$$

<u>Caso 1</u>: $\alpha \neq -4$ y $\alpha \neq -2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $\alpha = -4$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \xrightarrow{orlamos} \ \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $\alpha = -2$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \xrightarrow{orlamos} \ \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) El sistema tiene entonces infinitas soluciones. Del estudio anterior se deduce que es $\alpha = -2$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} -2x + y = 4 - 3z \\ x + y = -2 + 2z \end{cases}$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(-2 + \frac{5}{3}\lambda\,,\frac{1}{3}\lambda\,,\lambda\right)$$

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{array}\right)$$

a) Calculemos el determinante de la matriz ampliada y veamos cuándo es cero:

$$\det(A) = k^3 - 3k + 2 = 0 \;\rightarrow\; k = 1\,,\; k = -2$$

Caso 1: $k \neq 1$ y $k \neq -2$.

La ampliada tiene rango 3 pero la matriz de coeficientes no puede ser 3 pues sólo tiene dos columnas:

$$\text{rg}(A) = 3 \neq \text{rg}(C)$$

Es incompatible

Caso 2: $k = -2$

Encontramos

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 = n$$

S es compatible determinado

Caso 3: $k = 1$.

No encontramos ningún menor de orden 2 distinto de cero pero por lo menos

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

Luego

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 1 < 2$$

Así el sistema es compatible indeterminado con $2 - 1 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce que S equivale al sistema formado por sólo la primera ecuación (fila del menor principal) y tiene 1 parámetro:

$$S \equiv \{x + y = 1$$

Poniendo $x = \lambda$:

$$(x\,,y) = (\lambda\,,1 - \lambda)$$

EJERCICIO 3:

Mezclemos

x kilos de producto *A*

y kilos de producto *B*

z kilos de producto *C*

El total de kilos es 10:

$$x + y + z = 10 \text{ [1]}$$

El total de unidades de glúcidos es 19:

$$x + 2y + 4z = 19 \text{ [2]}$$

El total de unidades de lípidos es 12:

$$2x + y = 12 \text{ [3]}$$

Despejando y en la [3] obtenemos $y = 12 - 2x$ y sustituyendo en las dos primeras nos queda el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x + \ \ z & = & -2 \\ -3x + 4z & = & -5 \end{array} \right.$$

Resolviendo y sustituyendo en [3] nos queda:

$$x = 3 \, , \; y = 6 \, , \; z = 1$$

Hemos de mezclar 3 kilos de *A* con 6 kilos de *B* y 1 de *C*.