Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 14/04/2016	

EJERCICIO 1: [5]

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} (m+2)x - \quad y - z & = & 1 \\ -x - \quad y + z & = & -1 \\ x + my - z & = & m \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Para cierto valor del parámtetro m sabemos que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine dicho valor de m y resuelva en ese caso matricialmente el sistema.

b) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

c) [1] Resuelva el sistema en el caso de que tenga infinidad de soluciones.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} (k-1)\,x - \quad y + 2z = 3 \\ -2x + ky - 4z = 5 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, si fuese compatible, su solución?

c) [0,5] Razona si para cierto valor de k es $(1\,,1\,,1\,)$ una solución.

EJERCICIO 3: [2,5]

Un vendedor dispone de tres tipos de piensos: *A*, *B* y *C*. A cierto ganadero le cobra 0,62 € el kilo de una mezcla formada por una parte de pienso *A*, dos de *B* y tres de *C*. A otro ganadero le cobra 0,48 € el kilo de una mezcla formada por dos partes del pienso *A* y una del tipo *B*.

Halle el precio del kilo de cada tipo de pienso sabiendo que la mezcla, a partes iguales, de los tipos *B* y *C* cuesta 0,65 € el kilo.

EJERCICIO 1:

a) Para calcular el valor de m tengamos en cuenta que si C es la matriz de coeficientes y M es su inversa entonces su producto es la matriz identidad. Multiplicando la primera fila de C por la primera columna de M debemos obtener 1:

$$C \cdot M = \mathrm{I} \rightarrow (m+2)\cdot 1–1\cdot 0–1\cdot 1 = 1 \rightarrow m = 0$$

Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \rightarrow X = C^{-1}B \rightarrow X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -m^2 + 1 \xrightarrow{|C|=0} -m^2 + 1 = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq -1$ y $m \neq 1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio previo deducimos que es $m = 1$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y = & 1 + z \\ -x - y = & -1 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\,, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\,, \lambda \right)$$

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} k-1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & k & -4 & 5 \end{array} \right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |2| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \left| \begin{array}{rr} k-1 & 2 \\ -2 & -4 \end{array} \right| = 8 - 4k\ ,\ \Delta_2^2 = \left| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ k & -4 \end{array} \right| = 4 - 2k\ ,\ \Delta_2^3 = \left| \begin{array}{rr} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{array} \right| = 22$$

Caso 1: $k = 2$.

Todos los orlados en C son cero pero el orlado último en A, con la columna de los términos independientes no:

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $k \neq 2$

Todos los orlados son distintos de cero, por ello:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k = 2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{r} (k-1) - 1 + 2 = 3 \to k = 3 \\ -2 + k - 4 = 5 \to k = 11 \end{array} \right.$$

Como vemos, es imposible: no hay ningún valor de *k* que cumpla dichas condiciones. Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 3:

Sean

x el precio del kilo de pienso *A*

y el precio del kilo de pienso *B*

z el precio del kilo de pienso *C*

Un kilo de A más dos kilos de B más tres kilos de C son 6 kilos de mezcla a 0.62 € el kilo:

$$x + 2y + 3z = 6 \cdot 0.62 \text{ [1]}$$

Dos kilos de A más un kilo de B son tres kilos de mezcla a 0.48 € el kilo:

$$2x + y = 3 \cdot 0.48 \text{ [2]}$$

Un kilo de B más un kilo de C son 2 kilos de mezcla a 0.65 € el kilo:

$$y + z = 2 \cdot 0.65 \text{ [3]}$$

Despejando z en la [3] obtenemos $z = 1.30 - y$ y sustituyendo en las dos primeras nos queda el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - y & = & -0.18 \\ 2x + y & = & 1.44 \end{array} \right.$$

Resolviendo por reducción y sustituyendo en [3] nos queda:

$$x = 0.42\,,\ y = 0.60\,,\ z = 0.70$$

Tenemos así que un kilo de A cuesta 0.42 €, uno de B 0.60 € y un kilo de C 0.70 €.