Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 14/03/2016	

EJERCICIO 1: [3]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a y b para que se verifique $CD - A = \mathrm{I}$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + 2\,\mathrm{I} = A^t$.

c) [0,75] Halla una matriz Y tal que $B \cdot B^t + 2Y = D^t \cdot D$.

EJERCICIO 2: [1]

Sabemos que la matriz A tiene 3 filas, que es $C \in \mathfrak{M}_{4\times 5}$ y que existe la matriz $D = (A - B) \cdot C$. ¿Cuáles son las dimensiones de todas estas matrices?

EJERCICIO 3: [2]

Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro λ no es invertible.

b) [1,25] Calcule E^{-1} para $\lambda = 2$.

EJERCICIO 4: [0,75+0,75+0,5]

Sabiendo el determinante de la matriz

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

es 2, deduce razonadamente el valor de los siguientes determinantes:

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$ c) $\Delta_3 = \det\left(F^{-1}\right)$

EJERCICIO 5: [2]

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & x \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & x & 5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos las operaciones e igualamos el resultado a la matriz identidad:

$$C\cdot D-A=\begin{pmatrix} a\\ -b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-1 & -a+1\\ -2b & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left.\begin{cases} 2a-1 &= 1 \rightarrow a=1\\ -a+1 &= 0 \rightarrow a=1\\ -2b &= 0 \rightarrow b=0\\ b+1 &= 1 \rightarrow b=0\end{cases}\right| \rightarrow a=1\ ,\ b=0$$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$A\cdot X+2\mathrm{I}=A^t \rightarrow A\cdot X=A^t-2\mathrm{I} \rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(A^t-2\mathrm{I}\right)$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A)=-1-0=-1 \quad\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\mathrm{Adj}(A)^t=-1\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$A^t-2\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X=A^{-1}\cdot\left(A^t-2\mathrm{I}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita:

$$B\cdot B^t+2Y=D^t\cdot D \rightarrow 2Y=D^t\cdot D-B\cdot B^t \rightarrow Y=\frac{1}{2}\cdot\left(D^t\cdot D-B\cdot B^t\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y=\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

La matriz B debe tener las mismas filas que A, así que B tiene 3 filas. A y B tienen las mismas columnas que filas tiene C, así que A y B tienen 4 columnas. D tiene las mismas filas que $A-B$ y las mismas columnas que C, así que tiene 3 filas y 5 columnas. Resumiendo:

$$A\in\mathfrak{M}_{3\times 4}\ ,\ B\in\mathfrak{M}_{3\times 4}\ ,\ C\in\mathfrak{M}_{4\times 5}\ ,\ D\in\mathfrak{M}_{3\times 5}$$

EJERCICIO 3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(E) = -\lambda^2 + 4\lambda - 3 \;\rightarrow\; -\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{-4 \pm 2}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \quad \lambda = 1 \\ \searrow \quad \lambda = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = 3 & \rightarrow & \det(E) = 0 & \rightarrow \text{ No existe } E^{-1} \\ \text{Si } \lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq 3 & \rightarrow & \det(E) \neq 0 & \rightarrow \text{ Sí existe } E^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $\lambda = 2$ es E invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(E) = -2^2 + 8 - 3 = 1 \\ \\ \mathrm{Adj}(E) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

a) Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número":

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

b) Descomponemos el determinante en suma de dos:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En la última igualdad aplicamos que " si permutamos dos columnas el determinante cambia de signo" y "si una línea es proporcional a otra el determinante es cero".

c) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$F \cdot F^{-1} = \mathrm{I} \xrightarrow{*} |F| \cdot |F^{-1}| = 1 \rightarrow |F^{-1}| = \frac{1}{2}$$

(*) "El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores".

EJERCICIO 5:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & x \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & x & 5 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & x \end{vmatrix} = 4x - 12 \to 4x - 12 = 0 \to x = 3$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -8x + 24 \to -8x + 24 = 0 \to x = 3$$

Caso 1: $x = 3$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2)

Concluimos que el rango es 2.

Caso 2: $x \neq 3$.

El primer orlado (y también el segundo, aunque no es necesario) es no nulo. Por ello el rango es 3.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lllll} x \neq 3 & \to & \Delta_3^1 \neq 0 & \to & \mathrm{rg}(G) = 3 \\ x = 3 & \to & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & \to & \mathrm{rg}(G) = 2 \end{array}$$