Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 18/03/2016

EJERCICIO 1: [2,75]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + A^2 = \mathrm{I}$.

c) [0,5] Halla una matriz Y tal que $A + 3Y = B \cdot B^t$.

EJERCICIO 2: [2,75]

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m la matriz tiene inversa.

b) [0,75] Discuta el rango de D.

c) [1,25] Calcule D^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Sea E una matriz cuadrada de orden 3 con determinante 2 y cuyas respectivas columnas son c_1 , c_2 , c_3.

Calcula razonadamente el determinante de ...

a) [0,5] $3E$.

b) [0,5] E^{-1}.

c) [0,75] la matriz cuyas columnas son

$$3c_2 - 2c_3 \ , \ 4c_3 \ , \ c_1$$

d) [0,75] la matriz Z tal que $Z \cdot E^t = 2\mathrm{I}$.

EJERCICIO 4: [2]

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -x \\ 4 & x & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b-3 & -2a+b \\ -2a-b-1 & -a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a-2b-3 & = & 2 \\ -2a-b-1 & = & -1 \\ -2a+b & = & -4 \\ -a-2b & = & 3 \end{array} \right| \rightarrow a=1 \, , \, b=-2$$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X \cdot A + A^2 = \mathrm{I} \rightarrow X \cdot A = \mathrm{I} - A^2 \rightarrow X = \left(\mathrm{I} - A^2\right) \cdot A^{-1}$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 6-4 = 2 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$\mathrm{I} - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = \left(\mathrm{I} - A^2\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} -0.5 & 6 \\ 1.5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita: $A + 3Y = B \cdot B^t$

$$A + 3Y = B \cdot B^t \rightarrow 3Y = B \cdot B^t - A \rightarrow Y = \frac{1}{3} \cdot \left(B \cdot B^t - A\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -m^2 + m + 6 \rightarrow -m^2 + m + 6 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \quad m = -2 \\ \searrow \quad m = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Si } \ m = -2 \text{ ó } m = 3 & \rightarrow & \det(D) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } D^{-1} \\ \text{Si } \ m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 & \rightarrow & \det(D) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } D^{-1} \end{array}$$

b) Caso 1: $m \neq -2$ y $m \neq 3$.

Tenemos que $\det(D) \neq 0$ siendo D cuadrada de orden 3. Luego $\text{rg}(D) = 3$.

Caso 2: $m = -2$ ó $m = 3$.

Es fácil observar que hay un menor de orden 2 distinto de cero y que no depende de m:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora $\det(D) = 0$ pero $\Delta_2 \neq 0$ así que es $\text{rg}(D) = 2$.

c) Según lo anterior, para $m = 2$ es D invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(D) = -2^2 + 2 + 6 = 4 \\ \\ \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número":

$$\det(3E) = \det[3c_1\,, 3c_2\,, 3c_3] = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$$

b) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad, y como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores". Así

$$E \cdot E^{-1} = \text{I} \xrightarrow{*} |E| \cdot |E^{-1}| = 1 \rightarrow |E^{-1}| = \frac{1}{2}$$

(*) "El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores".

c) Descomponemos $\det[3c_2 - 2c_3\,, 4c_3\,, c_1]$ en suma de dos:

$\Delta = \det[3c_2\,, 4c_3\,, c_1] - \det[2c_3\,, 4c_3\,, c_1] = 3 \cdot 4 \cdot \det[c_2\,, c_3\,, c_1] - 0 = 3 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = 24$

Hemos aplicado que "si una línea es proporcional a otra el determinante es cero" y dos veces que "si permutamos dos columnas el determinante cambia de signo".

e) Aplicando otra vez las propiedades anteriores y al ser iguales el determinante de una matriz y de su traspuesta:

$$|Z| \cdot |E^t| = |2\text{I}| \rightarrow |Z| \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow |Z| = 4$$

EJERCICIO 4:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -x \\ 4 & x & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & x & 1 \end{array}\right| = x+1 \;\rightarrow -x+1=0 \;\rightarrow\; x=1$$

$$\Delta_3^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -x \\ \hline 4 & x & 3 \end{array}\right| = x^2+8x-9 \;\rightarrow x^2+8x-9=0 \;\rightarrow\; x=-9\,,\, x=1$$

Caso 1: $x=1$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2)

Concluimos que el rango es 2.

Caso 2: $x \neq 1$.

El primer orlado no es cero. Por ello el rango es 3.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lclcl} x \neq 1 & \rightarrow & \Delta_3^1 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G)=3 \\ x=1 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,,\Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G)=2 \end{array}$$