Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Integral definida – 09/02/2016	

EJERCICIO 1: [2,5]

Halla el área del recinto delimitado entre la curva $y = \dfrac{1}{2}\ln x$ y el eje de abscisas entre $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ y $x = \mathrm{e}$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x$$

a) [0,75] Demuestra que la recta $y = 3x + 6$ es tangente a la gráfica de f.

b) [1,75] Dibuja y obtén el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la gráfica de f y la recta tangente anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1,25] Estudia la variación (monotonía y extremos) de la función g definida por

$$g(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$$

b) [1,25] Calcula:

$$\int_0^3 3x|x-2|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos las funciones $f\,,g : [0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = b\sqrt{x}$$

Halla el valor de la constante $b > 0$ para el que el recinto que determinan sus gráficas tiene de área $3\ \mathrm{u}^2$.

Sugerencia: expresar todos los radicales como potencias fraccionarias.

EJERCICIO 1:

Hemos de averiguar el corte entre la curva y el eje de abscisas:

$$\frac{1}{2}\ln x = 0 \ \rightarrow\ \ln x = 0 \ \rightarrow\ x = 1$$

Ese punto de corte está en el interior del intervalo solicitado, así que calcularemos separadamente la integral de la función en $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,,1\right]$ y su integral en $[1\,,\mathrm{e}]$.

Ante todo, hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \frac{1}{2}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\cdot\ln x - \frac{x}{2} + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas mencionadas:

$$\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \frac{x}{2}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\cdot\ln x - \frac{x}{2}\right]_{x=1}^{x=1/\mathrm{e}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\cdot\ln x - \frac{x}{2}\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$$

La primera es negativa (curva bajo el eje X) y la segunda es positiva (curva sobre eje X), así:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 2:

a) Ante todo derivamos:

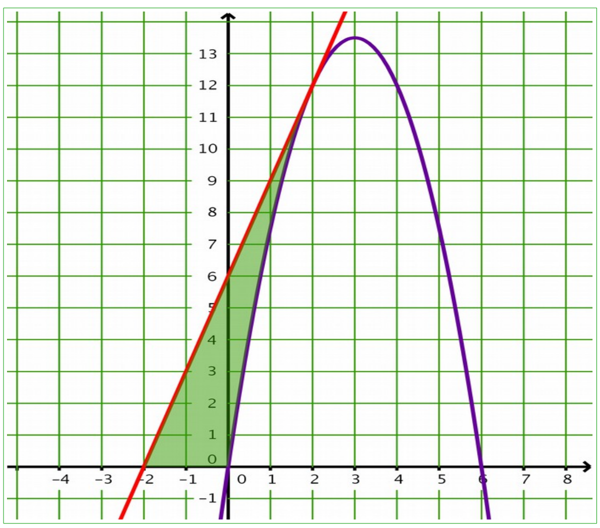
$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x \ \rightarrow\ f'(x) = -3x + 9$$

La pendiente de la tangente es igual a la derivada en el punto de tangencia:

$$f'(x) = m \ \rightarrow\ -3x + 9 = 3 \ \rightarrow\ x = 2$$

Veamos que la recta tangente para dicho valor es la recta dada:

$$y - f\,(2) = f'\,(2)\cdot(x-2) \ \rightarrow\ y - 12 = 3\,(x-2) \ \rightarrow\ y = 3x + 6$$



b) La gráfica de f es parabólica. El recinto lo tenemos aquí a la izquierda.

Podemos expresar el área como la del triángulo de vértices $(-2\,,0)$, $(2\,,0)$ y $(2\,,12)$ menos la que forma la gráfica de f con el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2$:

$$a(\mathscr{R}) = 4\times 12 : 2 - \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 9x\right)\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathscr{R}) = 24 - 14 = 10 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, obteniendo que:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x^4 + 1}$$

Partiendo de la gráfica del coseno: la derivada es positiva en $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$, negativa en $\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)$ y positiva en $\left(\frac{3\pi}{2}\,,\,2\pi\right)$, luego f crece en $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$, decrece en $\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)$ y vuelve a crecer en $\left(\frac{3\pi}{2}\,,\,2\pi\right)$.

Deducimos que para $x = \frac{\pi}{2}$ hay un máximo relativo y para $x = \frac{3\pi}{2}$ un mínimo relativo.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x - 2 = 0 \to x = 2$$

Resulta así:

$x < 2 \;\to\; |x-2| = -x+2 \;\to\; 3x|x-2| = 3x\,(-x+2) = -3x^2 + 6x$

$x \leq 2 \;\to\; |x-2| = x-2 \;\to\; 3x|x-2| = 3x\,(x-2) = 3x - 6x$

Luego separaremos la integral en dos:

$$\int_0^3 x\,|x-2|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (-3x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (3x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

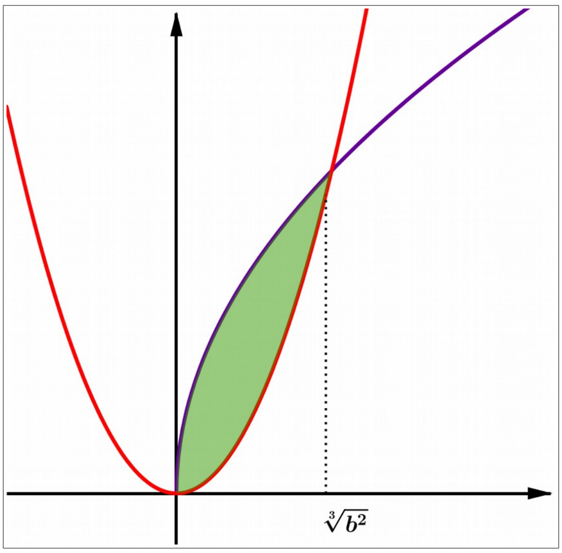
$$\int_0^3 x\,|x-2|\,\mathrm{d}x = \Big[-x^3 + 3x^2\Big]_{x=0}^{x=2} + \Big[x^3 - 3x^2\Big]_{x=2}^{x=3} = 4 - 0 + 0 - (-4) = 8$$

EJERCICIO 4:

Es fácil comprobar dónde se cortan ambas parábolas:

$$x^2 = b\sqrt{x} \;\to\; x^4 = b^2 x \;\to\; x \cdot \left(x^3 - b^2\right) = 0 \;\to\; x = 0\,, x = \sqrt[3]{b^2} = b^{2/3}$$

Un esbozo de la gráfica será como se muestra a continuación.



El área del recinto comprendido entre ambas es:

$$a(\mathscr{R}) = \int_0^{b^{2/3}} \left(bx^{1/2} - x^2\right)\mathrm{d}x = 3$$

Aplicando Barrow:

$$\left[\frac{2b}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=b^{2/3}} = \frac{b^2}{3}$$

Igualando y despejando:

$$\frac{b^2}{3} = 3 \;\to\; b = \sqrt{9} = 3$$

Concluimos que es

$$b = 3$$