Nombre:____	***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 08/02/2016

EJERCICIO 1: [2,5]

Halla el área del recinto delimitado entre la curva $y = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO 2: [2,5]

De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x) = |x^2 - 4|$$

a) [0,75] Haz un esbozo de la gráfica de f.

b) [1,75] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$. *Sugerencia:* dibuja dicho recinto aprovechando la gráfica de f y observa la simetría.

EJERCICIO 3:

a) [1,5] Estudia la variación (monotonía y extremos) de la función g definida por

$$g\,(x) = \int_1^x \frac{\ln t + 1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x > 0$$

b) [1] Sea f una función continua en el intervalo $[2\,,3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula:

$$\int_2^3 (5f(x) - 7)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 - ax$$

donde es $a > 0$ una constante.

a) [0,5] Obtén la ecuación de la recta tangente a su gráfica para $x = a$.

b) [0,5] Calcula los puntos de corte de la parábola con el eje X y realiza un esbozo esquemático del recinto que delimitan la gráfica de la función, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

c) [1,5] ¿Para qué valor de la constante $a > 0$ la superficie del recinto anterior es igual a $9\ \mathrm{u}^2$?

EJERCICIO 1:

Es necesario averiguar el corte de la curva con el eje de abscisas:

$$(x-1)\,\mathrm{e}^x = 0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ \mathrm{e}^x = 0 \rightarrow \text{no} \end{array}\right.$$

Como vemos, se cortan en el interior del intervalo de integración, así que calcularemos separadamente la integral de la función en $[0\,,1]$ y su integral en $[1\,,2]$.

Ante todo, hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-2)\,\mathrm{e}^x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas mencionadas:

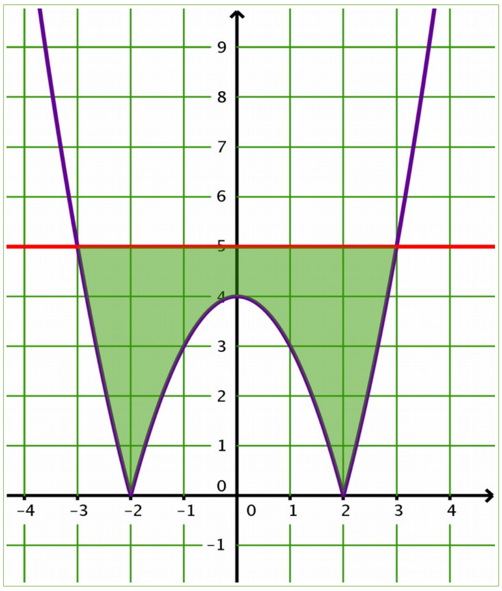
$$\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=0}^{x=1} = -\,\mathrm{e}+2$$

$$\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=1}^{x=2} = \mathrm{e}$$

La primera es negativa (curva bajo el eje X) y la segunda es positiva (curva sobre eje X), así:

$$a(\mathscr{R}) = \mathrm{e} - (-\,\mathrm{e}+2) = 2\,\mathrm{e}-2 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 2:



a) Para dibujar el valor absoluto dibujamos la parábola $y = x^2 - 4$, con una sencilla tabla de valores, y reflejamos la parte negativa (bajo el eje X). La ecuación $y = 5$ es la de una recta horizontal. Observamos claramente que se cortan en los puntos $(-3\,,5)$ y $(3\,,5)$.

b) Por simetría basta el área entre $x = 0$ y $x = 3$. Observemos que hemos de calcular separadamente la integral de la línea superior menos la inferior en $[0\,,2]$ y en $[2\,,3]$.

$$\int_0^2 \big(5-(-x^2+4)\big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{14}{3}$$

$$\int_2^3 \big(5-(x^2-4)\big)\,\mathrm{d}x = \left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{8}{3}$$

Así:

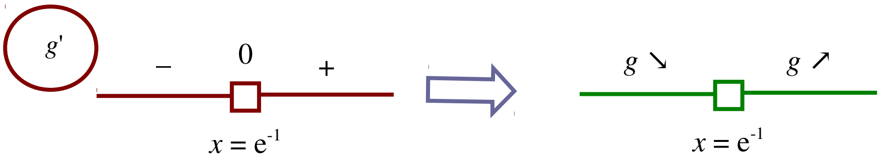
$$a(\mathscr{R}) = 2\cdot\left(\frac{14}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{44}{3}\ \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, obteniendo que:

$$g'(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2+1} \quad , \quad x > 0$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = \mathrm{e}^{-1}$ hay un mínimo absoluto.

b) Basta aplicar la Regla de Barrow (recordemos que F es una primitiva de f):

$$\int_2^3 (5f(x) - 7)\,\mathrm{d}x = \Big[5F(x) - 7x\Big]_{x=2}^{x=3} = (5\cdot 2 - 7\cdot 3) - (5\cdot 1 - 7\cdot 2) = -11 + 9 = -2$$

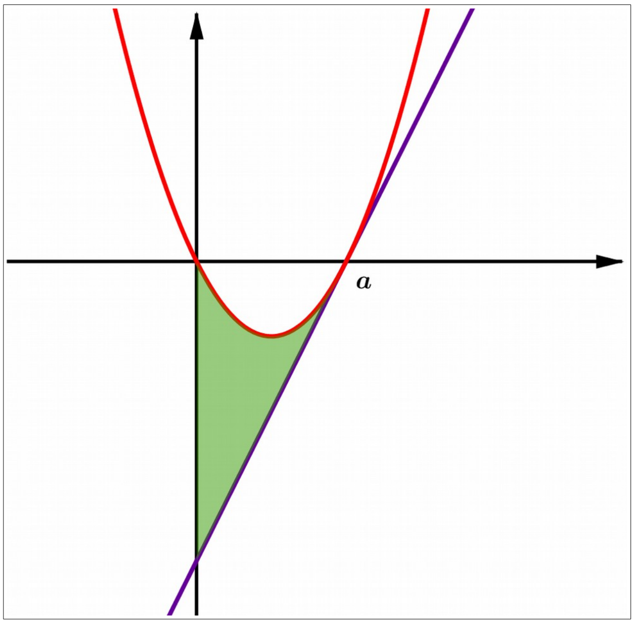
EJERCICIO 4:

a) Ante todo derivamos

$$f(x) = x^2 - ax \;\rightarrow\; f'(x) = 2x - a$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a) \;\rightarrow\; y - 0 = a(x-a) \;\rightarrow\; y = ax - a^2$$



b) Para cortar con el eje X igualamos a cero la ecuación de la parábola:

$$x^2 - ax = 0 \;\rightarrow\; x(x-a) = 0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$$

Como la parábola es convexa (ramas hacia arriba) y la recta es tangente en $x = a$, la gráfica será como vemos a la izquierda.

c) El área del recinto indicado entre ambas es:

$$a(\mathscr{R}) = \int_0^a \left[x^2 - ax - \left(ax - a^2\right)\right]\mathrm{d}x$$

Por Barrow:

$$a(\mathscr{R}) = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3}{3}$$

Igualando y despejando:

$$\frac{a^3}{3} = 9 \;\rightarrow\; a = \sqrt[3]{27} = 3$$

Concluimos que es

$$a = 3$$