Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2015

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-3x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica corta al eje de ordenadas para $y = 1$.

EJERCICIO 2:

Sea $g : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = 4x\,(4 - 3\ln x)$$

Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $(1\,, 0)$.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t = \sqrt{x^2 - 4}$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \tan(\pi x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{-2}{\mathrm{sen}^2(3x)}\,\mathrm{d}x$

<u>Observación</u>: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica corta al eje de ordenadas en el punto $(0\,,1)$:

$$f(0) = 1 \ \rightarrow\ -\frac{1}{3} + a = 1 \ \rightarrow\ a = \frac{4}{3}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \ \rightarrow\ -\frac{1}{3} + a = \frac{1}{3} + b \ \xrightarrow{a=4/3}\ b = \frac{2}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{4}{3} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Integramos por partes, donde $4x$ es la parte a integrar y $4 - 3\ln x$ la parte a derivar:

$$\begin{aligned} \int 4x\,(4 - 3\ln x)\,\mathrm{d}x &= 2x^2\,(4 - 3\ln x) - \int 2x^2 \cdot \frac{-3}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^2\,(4 - 3\ln x) + \int 6x\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^2\,(4 - 3\ln x) + 3x^2 + C \end{aligned}$$

Llamando G a la primitiva buscada:

$$G(1) = 0 \ \rightarrow\ 8 + 3 + C = 0 \rightarrow C = -11$$

Queda, simplificando

$$G(x) = x^2\,(11 - 6\ln x) - 11$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$t = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x^2 - 4 = t^2 \rightarrow x = \sqrt{t^2 + 4} \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 4}}\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{\sqrt{t^2 + 4}}{t + 1} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 4}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t + 1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$(t):(t+1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c=1 \\ r=-1 \end{cases}$$

Así:

$$I=\int\left(1+\frac{-1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = t-\ln|t+1|+C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t=\sqrt{x^4-4}$:

$$\int\frac{x}{1+\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-4}-\ln\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)+C$$

EJERCICIO 4:

Comprobado que el grado del numerador es el menor y que no es una logarítmica directa, veamos los ceros del denominador:

$$x^2-x-6=0 \;\rightarrow\; x=-2\,,x=3$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{(x+2)\,(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}\ (*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2x+1=a\,(x-3)+b\,(x+2) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x=-2\rightarrow -3=-5a\rightarrow a=\frac{3}{5} \\ \text{si } x=3\rightarrow 7=5b\rightarrow b=\frac{7}{5} \end{cases}\ (**)$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int\frac{2x+1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x=\int\frac{3/5}{x+2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{7/5}{x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{7}{5}\ln|x-3|+C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u=\ln x$:

$$I=\int(\ln x)^1\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,(\ln x)^2+C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-tangente con $u=x^2$:

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{1+(x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\arctan\left(x^2\right)+C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u=\cos(\pi x)$:

$$I=\frac{1}{-\pi}\int\frac{-\pi\,\mathrm{sen}\,(\pi x)}{\cos(\pi x)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)|+C$$

d) Es una integral compuesta de tipo tangente con $u=3x$:

$$I=\frac{-2}{3}\int\frac{3}{\mathrm{sen}^2\,(3x)}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cot(3x)+C$$