Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2015	

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+9x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica corta al eje de ordenadas para $y = 1$.

EJERCICIO 2:

Sea $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f\,(1) = 1$ con

$$f'\,(x) = (\ln x)^2$$

Obtén la expresión de f.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t = \sqrt{x}$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot\,(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \sec^2\,(2x-1)\,\mathrm{d}x$

<ins>Observación</ins>: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{3}\arctan(3x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica corta al eje de ordenadas en el punto $(0\,,1)$:

$$f\,(0) = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} + a = 1 \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f\,(0-) = f\,(0+) \;\rightarrow\; \frac{1}{2} + a = 0 + b \;\xrightarrow{a=1/2}\; b = 1$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{3}\arctan(3x) + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Integramos usando la integración por partes, tomando 1 para integrar y el logaritmo al cuadrado para derivar

$$f\,(x) = \int 1 \cdot (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = x\,(\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\,(\ln x)^2 - \int 2 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

En esta nueva integral volvemos a integrar por partes (tomando 2 para integrar y el logaritmo para derivar):

$$f\,(x) = x\,(\ln x)^2 - \left[2x\ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] = x\,(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

Como $f\,(1) = 1$:

$$f\,(1) = 1 \;\rightarrow\; 0 - 0 + 2 + C = 1 \;\rightarrow\; C = -1$$

Queda

$$f\,(x) = x\,(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - 1$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(2t^2\right) : \left(t^2+1\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 2 \\ r = -2 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(2 + \frac{-2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = 2t - 2\arctan(t) + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C$$

EJERCICIO 4:

Comprobado que el grado del numerador es el menor y que no es una logarítmica directa, veamos los ceros del denominador:

$$x^2 + x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -3\,, x = 2$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{(x+3)\,(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} \text{ (*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2x - 1 = a\,(x-2) + b\,(x+3) \;\longrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = -3 \rightarrow -7 = -5a \rightarrow a = \frac{7}{5} \\ \text{si } x = 2 \rightarrow 3 = 5b \rightarrow b = \frac{3}{5} \end{array} \right. \text{ (**)}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7/5}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3/5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{5}\ln|x+3| + \frac{3}{5}\ln|x-2| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral potencial con $u = 4x - 1$:

$$I = \frac{1}{4}\int (4x+1)^{1/2} \cdot 4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{(4x+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+1)^3}$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 2x$:

$$I = \frac{5}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\,\mathrm{arcsen}\,(2x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \mathrm{sen}\,(3x)$:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(3x)}{\mathrm{sen}\,(3x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|\mathrm{sen}\,(3x)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo tangente con $u = 2x - 1$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\cos^2(2x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan(2x-1) + C$$