Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 16/11/2015

EJERCICIO 1:

Consideremos la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{2x-1} + a & \text{si} \quad x \le \frac{1}{2} \\ \dfrac{\ln(2x)}{x} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) [0,5] Demuestra que ha de ser $a = -2$.

b) [1] Halla $f'(x)$.

c) [1] Obtén sus asíntotas.

d) [0,5] Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

EJERCICIO 2:

Consideremos la función f definida por

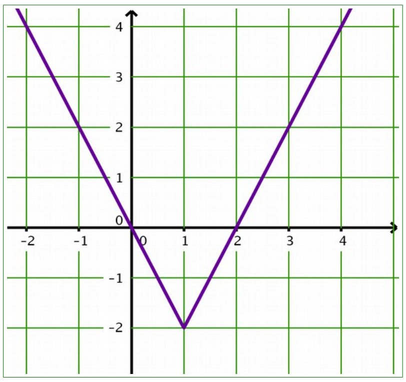
$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x-2} \qquad (x \neq 2)$$

a) [1] Determina los valores de a y b sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1\,,1)$.

b) [1] Para $a = 2$ y $b = 5$ calcula sus valores extremos en el intervalo compacto $[3\,,8]$.

c) [1] También para $a = 2$ y $b = 5$ halla las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3:



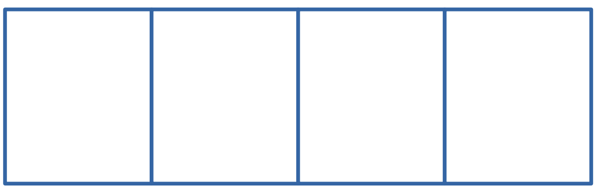
Aquí vemos la gráfica de la derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) [0,75] Averigua en qué intervalos crece y decrece $y = f(x)$, señalando las abscisas en que se alcanzan los extremos relativos.

b) [0,75] Estudia la curvatura de $y = f(x)$, indicando dónde se alcanzan los puntos de inflexión.

EJERCICIO 4: [2,5]

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 6250 m^2 dividido en cuatro parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar todas las lindes de las cuatro parcelas, determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima. ¿Cuál es dicha longitud?



EJERCICIO 1:

a) Como la función es continua en todo punto, en particular es continua para $x = \dfrac{1}{2}$ (separa-fórmulas):

Valor: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 + a = 2 + a$

Límites: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}-\right) = a + 2 \\ f\left(\frac{1}{2}+\right) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0 \end{cases}$

Concluimos que debe ser

$$a + 2 = 0 \to a = -2$$

b) Podemos derivar directamente para $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{2x-1} \cdot 2 = 4\,\mathrm{e}^{2x-1} & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{\frac{2}{2x} \cdot x - 1 \cdot \ln(2x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(2x)}{x^2} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para $x = \dfrac{1}{2}$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}-\right) = 4 \cdot 1 = 4 \\ f'\left(\frac{1}{2}+\right) = \dfrac{1 - \ln 1}{1/4} = 4 \end{cases}$$

Concluimos que f es derivable en el separa-fórmulas también y por ello:

$$f'(x) = \begin{cases} 4\,\mathrm{e}^{2x-1} & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1 - \ln(2x)}{x^2} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como es continua en todo punto no hay.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^{2x-1} - 2\right) = \mathrm{e}^{-\infty} - 2 = -2 \qquad \to y = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} = \left[\frac{\ln(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0 \qquad \to y = 0$$

<u>Asíntotas oblicua</u>: no puede haber

d) La ecuación de la tangente es:

$$y - f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = f'\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)\left(x - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) \to y - \frac{2}{\mathrm{e}} = 0 \cdot \left(x - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) \to y = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

EJERCICIO 2:

Primero, derivemos la función:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x-2}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{(2ax+b)\,(x-2)-\left(ax^2+bx\right)}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax-2b}{(x-2)^2}$$

a) Si en $(-1\,,1)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada es cero: $f'\,(-1)=0\ \rightarrow\ a+4a-2b=0\ \rightarrow\ 5a-2b=0$ [*]

La gráfica pasa por ese punto: $f\,(-1)=1\ \rightarrow\ \dfrac{a-b}{-3}=1\ \rightarrow\ a-b=-3$ [*]

Es fácil obtener de ahí que

$$a=2\,,\,b=5$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}=0\rightarrow x=-1\ ,\ x=5$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	3		5		8
y	33	↘	25	↗	28

Mínimo absoluto: $(5\,,25)$.

Máximo absoluto: $(3\,,33)$.

c) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de salto infinito en el cero del denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+5x}{x-2}=\left[\frac{18}{0}\right]=\pm\infty$$

Concluimos que $x=2$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x}{x+1}\overset{*}{=}\pm\infty$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador > grado denominador).

Concluimos que no hay asíntota horizontal.

<u>Asíntota oblicua</u>: podría haber una asíntota $y=mx+n$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2+x}\overset{*}{=}\frac{2}{1}=2$$

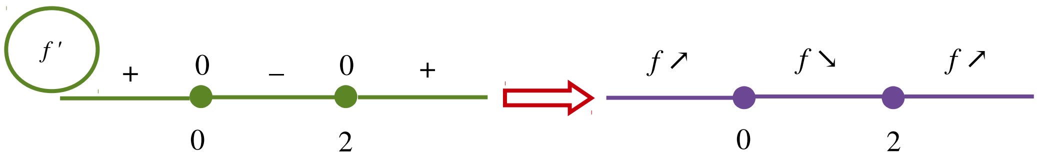
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+5x}{x-2}-2x\right)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{x-2}\overset{*}{=}\frac{9}{1}=9$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador = grado denominador)

Concluimos que $y=2x+9$ es una asíntota oblicua.

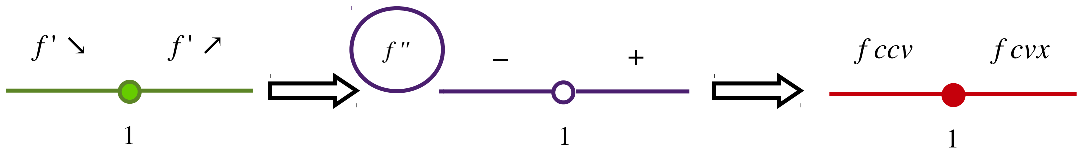
EJERCICIO 3:

a) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Observemos que para $x = 0$ la función f tiene un máximo relativo y que para $x = 2$ presenta un mínimo relativo.

b) De la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta punto de inflexión para $x = 1$.

EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamamos x a la base e y a la altura de ese rectángulo. Tenemos que minimizar la longitud de la valla:

$$L = 2x + 5y$$

[Ligadura]

Como su superficie es de 6250 m$^{2:}$

$$S = 6250 \to x \cdot y = 6250 \to y = \frac{6250}{x}$$

[Función]

Queremos minimizar

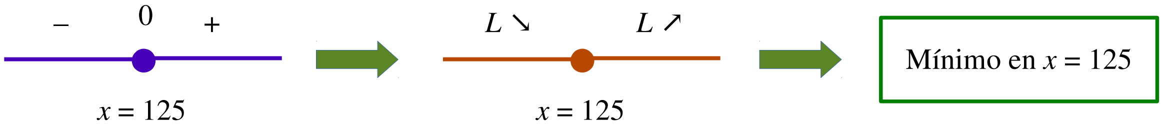
$$L = 2x + 5 \cdot \frac{6250}{x}$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$L' = 2 - \frac{31250}{x^2} = 0 \to 2x^2 = 31250 \to x = 125$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



Luego el solar tiene 125 m de largo y 50 m de ancho, siendo la longitud de la valla en total $L = 2 \cdot 125 + 5 \cdot 50 = 500$ m.