Nombre:____ **Curso**:_____

Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 19/10/2015

EJERCICIO 1: [3]

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - \sqrt{b-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{x/4} - a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{a}{x} + b \ln x$$

a) [1,25] Halla a y b para que la recta de ecuación $2x + y - 5 = 0$ sea tangente a su gráfica en el punto con abscisa $x = 1$.

b) [1,25] Para $a = 0$ y $b = 2$, obtén la ecuación de la tangente a su gráfica que pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula el valor del siguiente límite, según los valores de a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x + a}{1 - \cos(2x)}$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = \dfrac{0}{-2} = 0$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \dfrac{0}{-2} = 0 \\ f(0+) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

D.L. $\begin{cases} f'(0-) = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ f'(0+) = 1 \end{cases}$

Como no coinciden, concluimos que f no es derivable para $x = 0$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como no hay salto infinito, no hay asíntotas verticales.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-2} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y = 2$ para $x \to -\infty$

$y = 0$ para $x \to +\infty$

EJERCICIO 2:

Como es derivable en todo punto, ha de ser continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 0$:

Valor: $f(0) = a - \sqrt{b}$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = a - \sqrt{b} \\ f(0+) = 1 - a \end{cases}$

De ahí obtenemos igualando:

$$a - \sqrt{b} = 1 - a \text{ [*]}$$

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x/4} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0-) = \dfrac{1}{2\sqrt{b}} \\ f'(0+) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Igualando las derivadas laterales obtenemos $b = 4$ y sustituyendo en [*] obtenemos $a = \dfrac{3}{2}$.

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es:

$$f(x) = \frac{a}{x} + b\ln x \;\rightarrow\; f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$$

a) Primero pongamos la recta en explícita:

$$2x + y - 5 = 0 \;\rightarrow\; y = -2x + 5$$

La recta tangente coincide con la función para $x = 1$:

$$f\,(1) = y\,(1) \;\rightarrow\; f(1) = 3 \;\rightarrow\; a = 3$$

La pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'\,(1) = m \;\rightarrow\; -a + b = -2 \;\xrightarrow{a=3}\; b = 1$$

b) Nos queda

$$f(x) = 2\ln(x) \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{2}{x}$$

El punto es exterior a la curva y no sabemos en qué punto se traza la tangente. La tangente para $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \rightarrow y - 2\ln(a) = \frac{2}{a}(x-a)$$

Como pasa por $(0\,,0)$:

$$0 - 2\ln a = \frac{2}{a}(0-a) \;\rightarrow\; -2\ln a = -2 \;\rightarrow\; \ln a = 1 \;\rightarrow\; a = \mathrm{e}$$

Así, la tangente es:

$$y - 2\ln(\mathrm{e}) = \frac{2}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) \rightarrow y = \frac{2}{\mathrm{e}}x$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x + a}{1 - \cos(2x)} = \left[\frac{a}{0}\right]$$

Si $a \neq 0$ entonces es $L = \infty$.

Si $a = 0$ obtenemos una indeterminación que intentamos resolver con L'Hôpital (*):

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{1+2x} - 2}{2\,\mathrm{sen}\,(2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-4}{(1+2x)^2}}{4\cos(2x)} = \frac{-4}{4} = -1$$