Nombre:____	***Curso***:_____
Matemáticas II – Álgebra Lineal – 04/05/2015	

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Determina la constantes α y β para las que se cumple $B^2 + \alpha B = \beta I_2$.

b) [1] Determina los valores de λ para los que A tiene inversa.

c) [1,5] Para $\lambda = 0$, resuelve las ecuaciones matriciales $XA = A + 2B$ y $AY = A + 2B$.

EJERCICIO 2:

Sabiendo que el determinante de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

es 3, calcula indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1] $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$.

b) [1] El determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 4a - 2c \\ d & b & 4b - 2e \\ e & c & 4c - 2f \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 3:

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1] Calcula la matriz inversa de A .

b) [1] Calcula A^{127} y A^{128}.

c) [1] Estudia el rango de B.

d) [1] Determina x e y para que A y B conmuten.

Nombre:____ ***Curso***:_____
Matemáticas II – Álgebra Lineal – 04/05/2015

EJERCICIO 4:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & + & z & = & a-1 \\ 2x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) [1] Exprese y resuelva matricialmente el sistema para $a = 0$ sabiendo que en ese caso la inversa de la matriz de coeficientes es

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) [2,5] Discútelo según los valores del parámetro a.

c) [1] Resuelve el caso $a = 2$.

d) [0,5] Para dicho valor de $a = 2$, calcule, si es posible, una solución en la que la suma de las incógnitas sea igual a a cinco.

EJERCICIO 5: [2]

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} bx + 3y + \ z = 2 \\ 4x - 6y + bz = b \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

b) [0,5] Resuélvalo para $b = 0$.

EJERCICIO 6: [3]

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

EJERCICIO 1:

a) Debe ser:

$$B^2 + \alpha B = \begin{pmatrix} 11-3\alpha & -4+\alpha \\ -8+2\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Igualando los cuatro términos correspondientes:

$$\left.\begin{array}{rcl} 11-3\alpha & = & \beta \\ -4+\ \alpha & = & 0 \\ -8+2\alpha & = & 0 \\ 3-\ \alpha & = & \beta \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} \alpha = 4\,, \beta = -1$$

b) Una matriz tiene inversa sólo cuando su determinante no es igual a cero:

$$\det(A) = 2\lambda^2 - 2 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \pm 1$$

Así, concluimos que A tiene inversa sólo cuando λ es distinto de -1 y de $+1$.

c) Por el apartado anterior sabemos que A tiene inversa; la calculamos y despejamos:

$$XA = A + 2B \ \rightarrow\ X = (A+2B)\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AY = A + 2B \ \rightarrow\ Y = A^{-1}\,(A+2B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{I} \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Usamos que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores.

Y ahora $\det(A + A^t)$:

$$\det(A + A^t) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \det(A) = 24$$

Observemos que el determinante es lineal por cada fila /columna: sacamos 2 de cada una las filas.

b) Aplicando las propiedades:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 4a-2c \\ d & b & 4b-2e \\ e & c & 4c-2f \end{vmatrix} \overset{[a]}{=} \begin{vmatrix} b & a & -2c \\ d & b & -2e \\ e & c & -2f \end{vmatrix} \overset{[b]}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ d & b & e \\ e & c & f \end{vmatrix} \overset{[c]}{=} +2 \cdot \det(A) = 2 \cdot 3 = 6$$

[a]El determinante no varia si a una linea añadimos una combinación de otras: $c_3 - 4c_1$

[b] El determinante es lineal por columnas (sacamos “factor común” el -2 de la tercera columna)

[c] Un determinante cambia de signo si se permutan dos columnas (la primera y la segunda).

EJERCICIO 3:

a) Realizando el cálculo, es fácil comprobar que

$$A^{-1} = A$$

b) Del apartado anterior obtenemos que

$A^2 = A \cdot A = \mathrm{I}$

$A^3 = A^2 \cdot A = A$

Por inducción:

$$A^n = \begin{cases} \mathrm{I} & \text{si} \quad \text{n es par} \\ A & \text{si} \quad \text{n es impar} \end{cases}$$

Luego, en particular:

$$A^{127} = A \ , \ A^{128} = \mathrm{I}$$

c) Observemos que B es una matriz cuadrada de orden 3 donde:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \, , \, \det(B) = -y$$

Por tanto, si $y \neq 0$ es $\mathrm{rg}\,(B) = 3$ y si $y = 0$ es $\mathrm{rg}\,(B) = 2$.

d) Efectuamos e igualamos $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Igualando todos obtenemos

$$x = 0 \ , \ y = 1$$

EJERCICIO 4:

a) Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 3a + 2 \xrightarrow{|C|=0} -a^2 + 3a + 2 = 0 \to a = 1 \, , a = 2$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq 2$ y $a \neq 7$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 - \ \ z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = (1 - \lambda\,, 0\,, \lambda)$$

d) Debe ser:

$$x + y + z = 5 \ \rightarrow \ 1 - \lambda + 0 + \lambda = 5 \ \rightarrow \ 1 = 5 \ \rightarrow \ \text{NO}$$

Como vemos, no hay solución alguna que cumpla eso.

EJERCICIO 5:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} b & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & b & b \end{array} \right)$$

a) Vemos primero que hay un menor de orden uno (el cuatro de la segunda fila, por ejemplo) no nulo, así los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son 1 ó 2:

$$\Delta_1 = \det(4) \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la primera fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} b & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6b - 12 \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 4 & b \end{vmatrix} = b^2 - 4 \quad , \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} b & 2 \\ 4 & b \end{vmatrix} = b^2 - 8$$

Caso 1: $b = -2$.

Tenemos que S es incompatible pues los rangos no son iguales:

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta_1^1 \neq 0\,,\ \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = 0 & \to & \operatorname{rg}(C) = 1 \\ \Delta_2^3 \neq 0 & \to & \operatorname{rg}(A) = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \operatorname{rg}(C) \neq \operatorname{rg}(A)$$

Caso 2: $b \neq -2$.

Tenemos que $\Delta_2^1 \neq 0$ y así el rango de ambas matrices es el máximo posible:

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(A) = 2 < 3$$

Es compatible indeterminado con un parámetro.

b) Del estudio previo se deduce que S es compatible indeterminado con un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} 3y + \ \ z = 2 \\ 4x - 6y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\lambda} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1.5\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 2 - 3\lambda \end{array}\right.$$

EJERCICIO 6:

Sean

x el número de cajas que compra en el mercado 1

y el número de cajas que compra en el mercad 2

z el número de cajas que compra en el mercado 3

Total de cajas es 1500:

$$x + y + z = 1500 \ [1]$$

El coste total es 40500 €:

$$30x + 20y + 40z = 40500 \ [2]$$

En el primero se compró el 30% de las cajas:

$$x = 0.30 \cdot 1500 = 450 \ [3]$$

Sustituyendo [3] en [1] y [2] nos queda el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} y + z & = & 1050 \\ 20y + 40z & = & 27000 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} y = 750\,,\ z = 300$$

Concluimos que pagó 13500 euros en el primer mercado, 15000 euros en el segundo y 12000 euros en el tercero.