Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Septiembre 2015	

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:

La función f definida a continuación es continua:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x-2} + a & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [0,5] Halla el valor de a.

b) [0,75] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [0,75] Obtén sus asíntotas.

d) [0,5] Halla la ecuación de su recta tangente para $x = \mathrm{e}$.

EJERCICIO 2:

a) [1,25] Obtén

$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

b) [1,25] Calcula el área del recinto delimitado por la función $y = x\,\mathrm{e}^{2x}$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 2$.

EJERCICIO 3:

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \\ ax & + & y & + & z & = & 3a \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute según los valores del parámetro a.

b) [1] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4:

Consideremos

$$P = (1\,, -2\,, 3) \quad , \quad r : \begin{cases} x - z = -9 \\ y = -2 \end{cases} \quad , \quad \pi : 2x - y + z = 1$$

a) [1,25] Calcula las coordenadas del simétrico de P respecto de π.

b) [1,25] Halla los puntos de r que distan 5 unidades de P.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:

En las páginas de un libro ha de imprimirse un texto que ocupa 125 cm^2. Los márgenes laterales han de ser de 4 cm y los márgenes superior e inferior de 5 cm cada uno.

Calcula las dimensiones de cada página para que la cantidad de papel necesario sea mínima.

EJERCICIO 2:

Consideremos el recinto determinado por las gráficas cuyas ecuaciones son

$$y = |x^2 - 4| \quad , \quad y = 5$$

a) [1,25] Dibuja dicho recinto y calcula los puntos en que se interceptan.

b) [1,25] Calcula su área.

EJERCICIO 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a) [0,5] ¿Para qué valores de m tiene inversa?

b) [0,5] Discute el rango de A.

c) [1,5] Para $m = 0$ resuelve la ecuación matricial $X \cdot A + \mathrm{I} = A \cdot A^t$.

EJERCICIO 4:

Considera el triángulo de vértices:

$$A = (1\,,-1\,,0)\,,\; B = (2\,,1\,,1)\,,\; C = (-1\,,2\,,-1)$$

a) [0,5] Halla el área del triángulo.

b) [0,75] Determina la ecuación de la recta perpendicular al triángulo por el vértice A.

c) [0,75] Obtén la ecuación geneal del plano que contiene al triángulo.

d) [0,5] Calcula las coordenadas del punto D tal que $ABCD$ sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:

a) CONTINUIDAD:

Sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente este punto:

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) = \mathrm{e}^0 + a = 1 + a$

Límites: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = 1 + a \\ f(1+) = \frac{0}{1} = 0 \end{cases}$

Sólo es continua cuando:

$$1 + a = 0 \to a = -1$$

DERIVABILIDAD:

Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{2x-2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1 - \ln x}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para $x = 1$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(1-) = 2\,\mathrm{e}^0 = 2 \\ f'(1+) = \dfrac{1-0}{1} = 1 \end{cases}$$

Concluimos que f no es derivable para $x = 1$, habiendo un punto anguloso.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: no hay al ser continua en todo punto (no hay saltos infinitos)

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^{2x-2} - 1\right) = \mathrm{e}^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \qquad \to \qquad y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 \qquad \to \qquad y = -2$$

Tenemos así dos asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: no existen pues hay horizontal $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$

c) La ecuación de la tangente para $x = \mathrm{e}$ es:

$$y - f(\mathrm{e}) = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) \to y - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \cdot (x - \mathrm{e}) \to y = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

EJERCICIO 2:

a) Es una la integral indefinida que realizamos por partes:

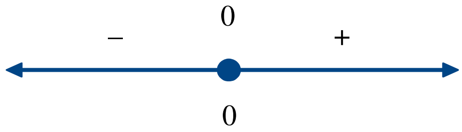
$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C$$

b) Para obtener dicho área se debe estudiar el signo de la función.

Vamos a estudiar el signo de la función. Primero veamos los ceros:

$$x\,\mathrm{e}^{2x} = 0 \to x = 0$$

Y así, los intervalos de signo:



Como cambia de signo en medio del intervalo, debemos calcular separadamente la integral en $[-1\,,0]$ y en $[0\,,2]$. Aplicando ahora la Regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2}$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{x=0}^{x=2} = \mathrm{e}^{4}\cdot 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Luego

$$a(\mathfrak{R}) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2}$$

EJERCICIO 3:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = 1 - a^2 \xrightarrow{|C|=0} a = \pm 1$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq -1$ y $a \neq +1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = -1$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetro.

b) Para $a = -1$, del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas de Δ_2), con x e y como incógnitas principales (columnas de Δ_2) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 1 + z \\ -x + y & = & -3 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y reduciendo obtenemos la solución:

$$(x\,, y\,, z) = (2 + t\,, -1\,, t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 4:

a) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta s que pasa por el punto P y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de$s$ con π (la proyección de P en π). Por último hallaremos el simétrico P' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q.

La recta s pasa por el punto $P = (1\,, -2\,, 3)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (2\,, -1\,, 1)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & -2 - \ \lambda \\ z & = & 3 + \ \lambda \end{array} \right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r \mapsto \pi : 2\,(1 + 2\lambda)\,(-2 - \lambda) + 3 + \lambda = 1 \ \rightarrow \ 6\lambda + 7 = 1 \ \rightarrow \ \lambda = -1$$

Es:

$$Q = (-1\,, -1\,, 2)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \ \rightarrow \ P' = 2Q - P \ \rightarrow \ P' = (-3\,, 0\,, 1)$$

b) Pasemos primero la recta a paramétricas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -9 + \lambda \\ y = -2 \\ z = \qquad \lambda \end{array} \right.$$

Llamemos Q a ese punto que dista 5 de P. Como está en la recta r será:

$$Q = (\lambda - 9\,, -2\,, \lambda)$$

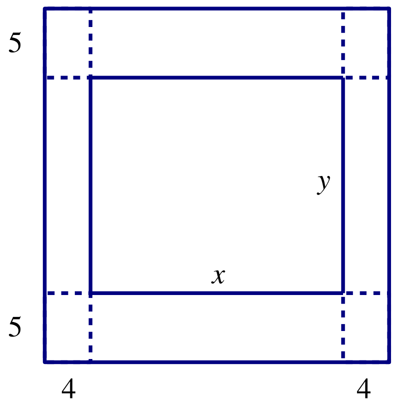
$$|\overrightarrow{Pq}| = 5 \ \rightarrow \ \sqrt{(\lambda - 10) + 0^2 + (\lambda - 3}^2 = 5 \ \rightarrow \ 2\lambda^2 - 26\lambda + 84 = 0 \ \rightarrow \ \left| \begin{array}{l} \lambda = 6 \\ \lambda = 7 \end{array} \right.$$

Luego hay dos soluciones:

$$Q_1 = (-3\,, -2\,, 6) \quad , \quad Q_2 = (-2\,, -2\,, 7)$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:



Designemos por x e y a las respectivas dimensiones del texto. La superficie de cada hoja de papel es igual a su ancho $(x+8)$ multiplicado por su alto $(y+10)$, así debemos <u>minimizar</u>:

$$S=(x+8)\cdot(y+10)$$

Como el texto tiene una superficie de 125 cm²:

$$x\cdot y=18\rightarrow y=\frac{125}{x}$$

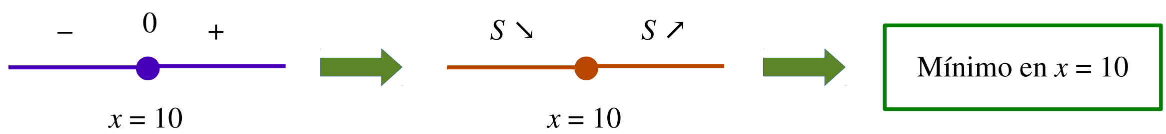
Así tenemos que minimizar la función

$$S\left(x\right)=(x+8)\cdot\left(\frac{125}{x}+10\right)=205+10x+\frac{1000}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero:

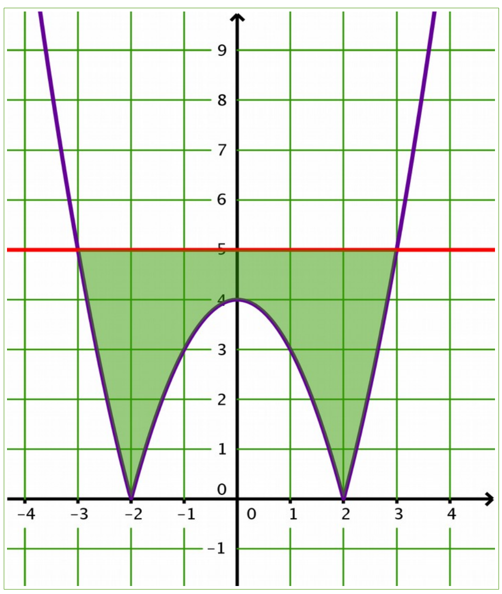
$$S'(x)=10-\frac{1000}{x^2}=0\rightarrow\frac{1000}{x^2}=10\rightarrow x^2=100\rightarrow x=10$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



Concluimos que la hoja tiene 10+8=18 cm de ancho y 12,5+10=22,5 cm de alto.

EJERCICIO 2:



a) Para dibujar el valor absoluto dibujamos la parábola $y=x^2-4$, con una sencilla tabla de valores, y reflejamos la parte negativa (bajo el eje X). La ecuación $y=5$ es la de una recta horizontal. Observamos claramente que se cortan en los puntos $(-3\,,5)$ y $(3\,,5)$.

b) Por simetría basta el área entre $x=0$ y $x=3$:

$$\int_0^2\left(5-\left(-x^2+4\right)\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{14}{3}$$

$$\int_2^3\left(5-\left(x^2-4\right)\right)\mathrm{d}x=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{x=3}=\frac{8}{3}$$

Así:

$$a(\mathscr{R})=2\cdot\left(\frac{14}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{44}{3}\ \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(A) = m^2 - 2m + 1 = 0 \ \rightarrow \ m = 1$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } \ m = 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{No existe } A^{-1}$$
$$\text{Si } \ m \neq 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Sí existe } A^{-1}$$

b) Caso 1: $m \neq 1$. Tenemos que $\det(A) \neq 0$ siendo A cuadrada de orden 3: $\mathrm{rg}(D) = 3$

Caso 2: $m = 1$. Ahora $\det(D) = 0$, todos los menores de orden 2 son cero y A no es cero: $\mathrm{rg}(A) = 1$.

c) Según lo anterior, para $m = 0$ tiene inversa A, por lo que podemos despejar la matriz X :

$$X \cdot A + \mathrm{I} = A \cdot A^t \ \rightarrow \ X \cdot A = A \cdot A^t - \mathrm{I} \ \rightarrow \ X = \left(A \cdot A^t - \mathrm{I}\right) \cdot A^{-1}$$

Realizando las operaciones del paréntesis y calculando la inversa de A:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

a) El área del triángulo ABC es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 7\vec{k} = (-5\,,-1\,,7)$$

Así:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 1 + 49} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \text{(u.a.)}$$

b) La recta pasa por el punto $A = (1\,,-1\,,0)$ y como es perpendicular al plano, tomamos como vector director a $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (que ya lo calculamos antes):

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{7}$$

c) El plano pasa por el punto $A = (1\,,-1\,,0)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (que ya lo calculamos antes):

$$-\,5\,(x-1) - (y-1) + 7z = 0 \rightarrow -5x - y + 7z + 4 = 0$$

d) Dibujando el paralelogramo, observamos que debe ser

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \rightarrow D - C = A - B \rightarrow D = (-2\,,0\,,-2)$$