Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas II – Examen Final

EJERCICIO 1:

Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{x+3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} - 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1,25] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

b) [0,75] Obtén sus asíntotas.

c) [0,5] Halla la ecuación de su recta tangente para $x = -1$.

EJERCICIO 2:

Calcula el límite siguiente según los valores de a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - x - 1}{1 - \cos(2x)}$$

EJERCICIO 3:

Consideremos la función dada por $f : [0\,,8] \to \mathbb{R}$ definida por:

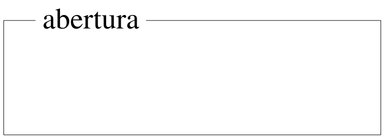
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

a) [1,5] Obtén los valores de a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión para $x = 3$ y que en él la recta tangente es $y = -12x + 37$.

b) [1] Para $a = -9\,,\ b = 15\,,\ c = 10$ obtén sus valores extremos.

EJERCICIO 4:

En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 110 m. de valla metálica para vallarla, dejando en uno de sus lados una abertura de 10 m. sin vallar tal y como se muestra en la figura:



Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

EJERCICIO 5:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = t^2$.

Todos los ejercicios tienen una valoración máxima de 2,5 puntos.

EJERCICIO 6:

Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 7:

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x\cos(x)$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

EJERCICIO 8:

a) [1,25] Halla el área del recinto delimitado por la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $2x - y - 1 = 0$.

b) [1,25] Calcula

$$\int_1^4 |x^2 - 9|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 9:

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$

b) [1,25] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + A^2 = \mathrm{I}$.

c) [0,5] Halla una matriz Y tal que $A + 3Y = B \cdot B^t$.

EJERCICIO 10:

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m la matriz tiene inversa.

b) [0,75] Discuta el rango de D.

c) [1] Calcule D^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 11:

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

Todos los ejercicios tienen una valoración máxima de 2,5 puntos.

EJERCICIO 12:

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ -\lambda x & + & 3y & + & z & = & -7 \\ x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & -5 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) [1] Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

EJERCICIO 13:

Dados los puntos

$$A(1,1,1) \quad , \quad B(-1,2,0) \quad , \quad C(2,1,2) \quad , \quad D(t,-2,2)$$

a) [0,75] Determina el valor de t para que sean coplanarios.

b) [1] Para $t=5$ halla la intersección de las rectas AC y BD.

c) [0,75] Halla el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 14:

Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-5\lambda \\ y & = & -2+3\lambda \\ z & = & 2+2\lambda \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+11 & = & 0 \\ 2y+z-19 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) [1,25] Estudia su posición relativa.

b) [1,25] Halla la ecuación general del plano que es paralelo a r y contiene s.

EJERCICIO 15:

Sean los puntos

$$A(1,1,1) \quad , \quad B(-1,2,0) \quad , \quad C(2,1,2)$$

a) [1] Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que contiene al punto C.

b) [1,5] Halla la proyección del origen de coordenadas sobre el plano que pasa por los puntos A, B y C.

EJERCICIO 16:

Consideremos

$$P(1\,,4\,,-2) \quad , \quad r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

a) [2] Halla el punto simétrico de P respecto de r.

b) [0,5] ¿Existe algún punto de la recta cuya distancia a P es 2? ¿Y a distancia 3?

Todos los ejercicios tienen una valoración máxima de 2,5 puntos.

EJERCICIO 1:

a) CONTINUIDAD:

Sólo puede ser discontinua para $x = -3$ (cero del denominador) y para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-3}$

Valor: $f(-3) = \text{No existe}$

Límites: $$\lim_{x\to -3} f(x) \begin{cases} f(-3_-) = \left[\dfrac{-3}{-0}\right] = +\infty \\ f(-3_+) = \left[\dfrac{-3}{+0}\right] = -\infty \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -2$.

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = \dfrac{-3}{3} = -1$

Límites: $$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \dfrac{-3}{3} = -1 \\ f(0+) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

DERIVABILIDAD:

Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+3)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = -3$ es claro que no hay derivada.

Para $x = 0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(0_-) = \dfrac{3}{3^2} = \dfrac{1}{3} \\ f'(0_+) = -2\,\mathrm{e}^0 = -2 \end{cases}$$

Concluimos que f no es derivable para $x = 0$, habiendo un punto anguloso.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: como $\lim_{x\to -3} f(x) = \pm\infty$

$x = -3$

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3}{x+3} = \left[\frac{-3}{-\infty}\right] = 0 \qquad \to \qquad y = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^{-2x} - 2) = \mathrm{e}^{-\infty} - 2 = 0 - 2 = -2 \qquad \to \qquad y = -2$$

Tenemos así dos asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: no existen pues hay horizontal $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$

c) La ecuación de la tangente para $x = -1$ es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \;\rightarrow\; y - \frac{-3}{2} = \frac{3}{4}(x+1) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - x - 1}{1 - \cos(2x)} = \frac{\mathrm{e}^{0} - 0 - 1}{1 - \cos(0)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{e}^{ax} - 1}{2\operatorname{sen} 2x} = \left[\frac{a-1}{0}\right] \text{[*]}$$

Caso $a \neq 1$: es [*] un límite infinito (numerador tiende a número no nulo y denominador a cero):

$$L = \left[\frac{a-1}{0}\right] = \pm\infty$$

Caso $a = 1$: es [*] una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{2\operatorname{sen} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}}{4\cos 2x} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 3:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

Para $x = 2$ hay inflexión así:

$$f''(2) = 0 \;\rightarrow\; 12 + 2a = 0 \;\rightarrow\; a = -6$$

Para $x = 2$ la recta tangente es $y = -12x + 37$, de donde deducimos dos cosas:

La pendiente es $m = -12$: $\quad f'(3) = -12 \;\rightarrow\; 27 - 54 + b = -12 \;\rightarrow\; b = 15$

La ordenada es $y(3)$: $\quad f(3) = 1 \;\rightarrow\; 27 - 81 + 45 + c = 1 \;\rightarrow\; c = 10$

Concluimos así que

$$a = -6\,,\; b = 15\,,\; c = 10$$

b) Los extremos absolutos (máximo y mínimo) de una función derivable, en un intervalo cerrado, se alcanzan o en los bordes del intervalo o en los ceros de la derivada.

Así, primero derivaremos y hallaremos los ceros de la derivada:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 0 \;\rightarrow\; x = 1\,,\; x = 5$$

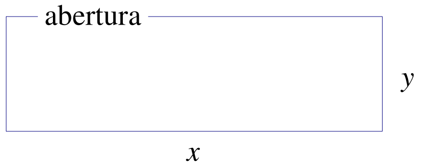
Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	0		1		5		8
y	10	↗	20	↘	–15	↗	66

Mínimo absoluto: $(5\,,-15)$

Máximo absoluto: $(8\,,66)$

EJERCICIO 4:



Llamando a las dimensiones tal y como vemos en el dibujo:

$$2y + x + x - 10 = 110 \;\to\; y = 60 - x$$

OJO: Observemos que debe ser $0 < x < 60$.

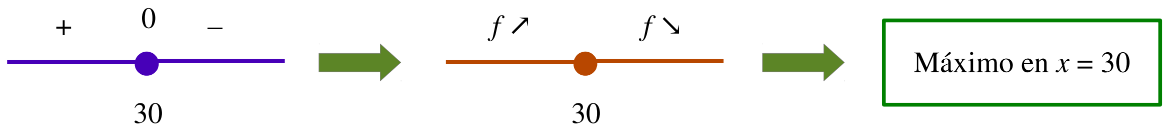
El área del recinto rectangular es lo que tenemos que maximizar (largo por ancho):

$$f(x) = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 60 - 2x = 0 \;\to\; x = 30$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



Concluimos que el recinto debe tener 30 metros de ancho y 30 metros de largo.

La superficie del recinto de máxima área es

$$S = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m}^2$$

EJERCICIO 5:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = t^2 \to \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2+1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$(2t^2) : (t^2+1) \;\to\; \begin{cases} c = 2 \\ r = -2 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(2 + \frac{-2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = 2t - 2\arctan t + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C$$

EJERCICIO 6:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x}\,\mathrm{d}x$$

Observemos que el grado del numerador es menor que el del denominador y que

$$x^2-5x = x\,(x-5)$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x+1}{x\,(x-5)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-5}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$3x+1 = a\,(x-5)+bx \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x=0 \to 1=-5a \to a=-\frac{1}{5} \\ \text{si } x=5 \to 16=5b \to b=\frac{16}{5} \end{cases}$$

Resulta:

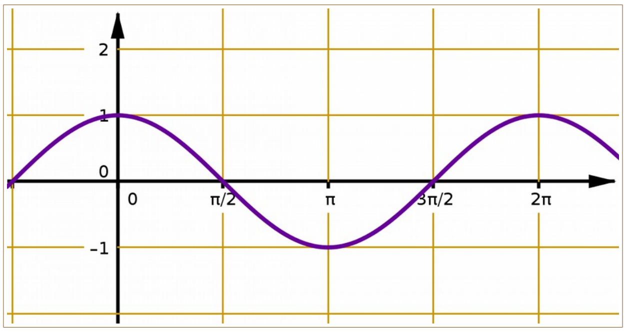
$$I = \int \frac{-\frac{1}{5}}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{16}{5}}{x-5}\,\mathrm{d}x$$

Definitivamente:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\ln|x| + \frac{16}{5}\ln|x-5| + C$$

EJERCICIO 7:

Vamos a estudiar el signo de la función. Para ello, recordemos la gráfica de la función coseno:



En el intervalo de integración f tiene el mismo signo que el coseno: es positiva en el intervalo $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ y negativa en $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$.

Así que el área del recinto indicado viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int 3x\cos x\,\mathrm{d}x = 3x\,\mathrm{sen}\,x - \int 3\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = 3x\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas anteriores:

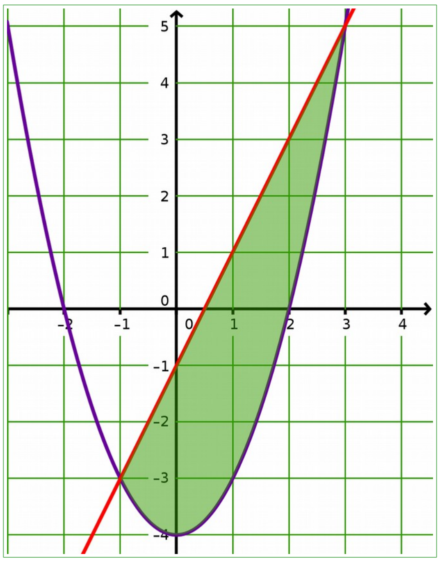
$$\int_{0i}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[3x\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - 3$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[3x\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x\Big]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = -3 - \frac{3\pi}{2}$$

Luego

$$a(\mathfrak{R}) = \frac{3\pi}{2} - 3 + 3 + \frac{3\pi}{2} = 3\pi \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 8:



a) Para hallar los puntos de corte de dos gráficas resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$y = x^2 - 4 \text{ y la recta } 2x - y - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{igualando} x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolviendo y sustituyendo obtenemos que se cortan en los puntos $(-1\,,-3)$ y $(3\,,5)$.

La gráfica (parábola y recta) es sencilla obtenerla con dos tablas de valores, teniendo en cuenta los dos puntos de corte.

b) El área viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_{-1}^{3} \big(2x - 1 - (x^2 - 4)\big)\,\mathrm{d}x$$

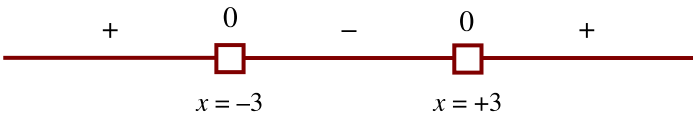
Ahora, simplificamos y aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathfrak{R}) = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3\right]_{x=-1}^{x=3} = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

c) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x^2 - 9 = 0 \to x = \pm 3$$

El signo de $x^2 - 9$ es:



Resulta así:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ -x^2 + 9 & \text{si} \quad -3 < x \leq +3 \\ x^2 - 9 & \text{si} \quad x > +3 \end{cases}$$

Así que separamos la integral en dos:

$$\int_1^4 |x^2 - 9|\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (-x^2 + 9)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (x^2 - 9)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^4 |x^2-9|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{x=1}^{x=3} + \left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{x=3}^{x=4} = \frac{28}{3}+\frac{10}{3}=\frac{38}{3}$$

EJERCICIO 9:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B\cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b-3 & -2a+b \\ -2a-b-1 & -a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{\begin{array}{rcr} a-2b-3 & = & 2 \\ -2a-b-1 & = & -1 \\ -2a+b & = & -4 \\ -a-2b & = & 3 \end{array}\right| \rightarrow\ a=1\,,\ b=-2$$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X\cdot A + A^2 = \mathrm{I}\ \rightarrow\ X\cdot A = \mathrm{I}-A^2\ \rightarrow\ X=\left(\mathrm{I}-A^2\right)\cdot A^{-1}$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A)=6-4=2 \quad\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\mathrm{Adj}(A)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$\mathrm{I}-A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X=\left(\mathrm{I}-A^2\right)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix} -0.5 & 6 \\ 1.5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita: $A+3Y=B\cdot B^t$

$$A^3+3Y=B\cdot B^t\ \rightarrow\ 3Y=B\cdot B^t-A^3\ \rightarrow\ Y=\frac{1}{3}\cdot\left(B\cdot B^t-A^3\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 10:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D)=-m^2+m+6\ \rightarrow\ -m^2+m+6=0\ \rightarrow\ m=\frac{-1\pm 5}{-2}\ \begin{array}{l} \nearrow\ m=-2 \\ \searrow\ m=3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } \ m=-2 \text{ ó } m=3 \quad \rightarrow \quad \det(D)=0 \quad \rightarrow \quad \text{No existe } D^{-1}$$

$$\text{Si } \ m\neq -2 \text{ y } m\neq 3 \quad \rightarrow \quad \det(D)\neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Sí existe } D^{-1}$$

b) Es fácil observar que hay un menor de orden 2 distinto de cero y que no depende de m:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Caso 1: $m\neq -2$ y $m\neq 3$. Tenemos que $\det(D)\neq 0$ siendo D cuadrada de orden 3: $\operatorname{rg}(D)=3$

Caso 2: $m=-2$ ó $m=3$. Ahora $\det(D)=0$ pero $\Delta_2\neq 0$: $\operatorname{rg}(D)=3$

c) Según lo anterior, para $m=2$ es D invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(D) = -2^2+2+6=4 \\ \\ \operatorname{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{4}\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11:

Sean

x el número de cajas del mercado 1

y el número de cajas del mercado 2

z el número de cajas del mercado 3

Total de calcetines es 1500:

$$x+y+z=1500 \ [1]$$

Coste total es 40500 €:

$$30x+20y+40=40500 \ [2]$$

En el mercado 1 adquirió el 30% del total:

$$x=0.30\cdot 1500=450 \ [3]$$

Si sustituimos [3] en las ecuaciones [1] y [2] y simplificamos, obtenemos el sencillo sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y+\ \ z=1050 \\ y+2z=1350 \end{array}\right\} \rightarrow \ z=300\,,\ y=750$$

Tenemos así que pagó:

Mercado 1: $30\times 450=13500$ euros

Mercado 2: $20\times 750=15000$ euros

Mercado 3: $40\times 300=12000$ euros

EJERCICIO 12:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \xrightarrow{|C|=0} \to \lambda = -2\,,\lambda = -1$$

Caso 1: $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

Caso 2: $\lambda = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

Caso 3: $\lambda = -2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas de Δ_2), con x e y como incógnitas principales (columnas de Δ_2) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + \ \ y = -2 - z \\ 2x + 3y = -7 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y reduciendo obtenemos la solución:

$$(x\,, y\,, z) = (1 - 2t\,, -3 + t\,, t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 13:

Dados los puntos

$$A(1,1,1) \quad , \quad B(-1,2,0) \quad , \quad C(2,1,2) \quad , \quad D(t,-2,2)$$

a) Los puntos serán coplanarios si es cero el determinante:

$$\det[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ t-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = t-5$$

Luego sólo son coplanarios cuando $t=5$.

b) Es fácil obtener las ecuaciones paramétricas de las rectas AC y BD:

$$AC : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad , \quad BD : \begin{cases} x = -1+6\mu \\ y = \quad 2-4\mu \\ z = \quad 0+2\mu \end{cases}$$

Sabemos de lo anterior que son secantes. Igualamos las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{r} 1+\lambda = -1+6\mu \\ 1 = \quad 2-4\mu \\ 1+\lambda = \quad 0+2\mu \end{array} \right| \;\to\; \lambda = -\frac{1}{2}\,,\; \mu = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos rectas, se obtiene que ambas se cortan en el punto:

$$(x\,,y\,,z) = \left(\frac{1}{2}\,,1\,,\frac{1}{2}\right)$$

c) El área del triángulo ABC es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + -\vec{k} = (1\,,1\,,-1)$$

Así:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(u.a.)}$$

EJERCICIO 14:

Pasemos primero s a paramétricas:

$$s : \begin{cases} x-2y+11 = 0 \\ 2y+z-19 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = -11+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 19-2\lambda \end{cases} \to\; P_s = (-11\,,0\,,19) \text{ y } \vec{v}_s = (2\,,1\,,-2)$$

a) Para estudiar su posición relativa primero veamos si son proporcionales sus vectores directores:

$$\vec{v}_r = (-5\,,3\,,2)\;,\; \vec{v}_s = (2\,,1\,,-2) \;\to\; \frac{-5}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{3}{-2} \;\to\; \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta y calculamos

$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -12 & 2 & 17 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -103 \neq 0$$

Concluimos que las rectas se cruzan.

b) Como s está contenida en el plano, un punto de éste es $P_s = (-1\,,0\,,19)$. Y los vectores directores de las rectas $\vec{v}_r = (-5\,,3\,,2)$ y $\vec{v}_s = (2\,,1\,,-2)$ determinan la dirección del plano. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+11 & y & z-19 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} -8x - 6y - 11z + 121 = 0$$

EJERCICIO 15:

Sean los puntos

$$A(1,1,1) \quad , \quad B(-1,2,0) \quad , \quad C(2,1,2)$$

a) Hallemos la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que contiene al punto C .

Punto: $C\,(2\,,1\,,2)$

Vector normal: $\overrightarrow{AB} = (-2\,,1\,,-1)$

Ecuación:

$$-\,2\cdot(x-2) + 1\cdot(y-1) - 1\cdot(z-2) = 0 \;\rightarrow\; -2x + y - z + 5 = 0$$

Nota: también podríamos poner $-\,2x + y - z + d = 0$ y ahora hallar d para que pase por C:

$$-\,4 + 1 - 2 + d = 0 \;\rightarrow\; d = 5$$

b) Primero obtendremos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

Punto: $A = (1\,,1\,,1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (-2\,,1\,,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (1\,,0\,,1)$

Su ecuación es:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; x + y - z - 1 = 0$$

Ahora obtendremos la recta perpendicular al plano que pasa por el origen de coordenadas (observemos que el vector normal $\vec{n} = (1\,,1\,,-1)$ al plano es director para la recta):

$$r : \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo r en π obtendremos la proyección Q de $O = (0\,,0\,,0)$ sobre π:

$$\lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; Q = \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

EJERCICIO 16:

Consideremos

$$P\,(1\,,4\,,-2) \quad , \quad r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Primero calcularemos el punto proyección Q de $P\,(1\,,4\,,-2)$ sobre r.

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases} \rightarrow Q = (1+2\lambda\,,2\lambda\,,-1-\lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (2\lambda\,,2\lambda-4\,,-\lambda+1)\cdot(2\,,2\,,-1) = 0 \;\rightarrow\; 9\lambda - 9 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$$

Tenemos así que

$$Q = (3\,,2\,,-2)$$

El punto Q es el punto medio del segmento que une P con su su simétrico P'. Así:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P \;\rightarrow\; P' = (5\,,0\,,-2)$$

b) Veamos cuál es la distancia de P a r:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

No existe P_r con $\mathrm{d}\,(P\,,P_r) = 2 < \sqrt{8}$.

Sí existe P_r con $\mathrm{d}\,(P\,,P_r) = 3 > \sqrt{8}$.

Observemos que habrá en este caso dos soluciones P_1 y P_2 de manera que PP_1P_2 será un triángulo isósceles con los lados iguales midiendo 3 y cuya altura será PQ que mide $\sqrt{8}$.