Nombre:____ ***Curso***:_____ *Matemáticas II – Geometría del espacio – 18/05/2014*		

EJERCICIO 1:

Considera la recta r que pasa por los puntos

$$A\,(1\,,0\,,-1) \quad , \quad B\,(-1\,,\,1,0)$$

a) [1] Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pase por $C\,(-2\,,3\,,2)$.

b) [1,5] Calcula la distancia entre r y s.

EJERCICIO 2:

Sean

$$P\,(1\,,0\,,-1) \quad , \quad r: \frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3} \quad , \quad \pi : x+2y-3z-6=0$$

a) [1] Calcula el volumen del tetraedro que determina el plano π con los ejes coordenados.

b) [1,5] Halla las ecuaciones paramétricas del plano que pasando por el punto P corta perpendicularmente a la recta r.

EJERCICIO 3:

Considera las rectas

$$r: \frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3} \quad , \quad s: \left\{ \begin{array}{r} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array} \right.$$

a) [1] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1,5] Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

EJERCICIO 4:

Dados el plano π y la recta r de ecuaciones

$$\pi : x+2y-z=0 \quad , \quad r: \left\{ \begin{array}{rcl} x-ay & = & 3 \\ z & = & 3 \end{array} \right.$$

a) [1] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) [1,5] Halla el punto simétrico del punto $Q\,(-1\,,2\,,-3)$ respecto del plano π .

EJERCICIO 1:

a) Como son paralelas, un vector director de r lo es de s:

Punto: $C\,(-2\,,3\,,2)$

Vector director: $\overrightarrow{AB} = (-2\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$s: \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

b) Sabemos de lo anterior que son paralelas, así para hallar la distancia entre ellas basta tomar un punto de una recta y calcular la distancia a la otra.

Tomemos el punto $A\,(1\,,0\,,-1)$, de la recta r, y calculemos su proyección Q sobre s. Será:

$$Q = (-2 - 2\lambda\,,3 + \lambda\,,2 + \lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{AQ} \perp \vec{v}_s$:

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \;\rightarrow\; (-3 - 2\lambda\,,3 + \lambda\,,3 + \lambda) \cdot (-2\,,1\,,1) = 0 \;\rightarrow\; 6\lambda - 12 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -2$$

Tenemos así que $\overrightarrow{AQ} = (1\,,1\,,1)$ y por ello

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = \mathrm{d}\,(A\,,s) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\,\mathrm{u}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y = z = 0 \;\mapsto\; \pi : x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; A = (6\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x = z = 0 \;\mapsto\; \pi : 2y - 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 3 \;\rightarrow\; B = (0\,,3\,,0)$

Corte con eje Z: $x = y = 0 \;\mapsto\; \pi : -3z - 6 = 0 \;\rightarrow\; z = -2 \;\rightarrow\; C = (0\,,0\,,-2)$

El tetraedro tiene de vértices el origen de coordenadas y esos tres puntos. Calculemos el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Así, su volumen es:

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AB}\right]\right| = |-6| = 6\;\left(\mathrm{u}^3\right)$$

b) Si el plano es perpendicular r, un vector normal del plano pedido es el vector director de la recta. Así:

$$n = \vec{v}_r = (2\,,1\,,-3)$$

Luego la ecuación normal del plano es

$$2x + y - 3z + d = 0$$

Como el punto P está en el plano, al sustituir sus coordenadas:

$$P \mapsto 2 + 3 + d = 0 \;\rightarrow\; d = -5 \;\rightarrow\; 2x + y - 3z - 5 = 0$$

EJERCICIO 3:

Pasemos primero la recta s a paramétricas:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \;\rightarrow\; r: \begin{cases} x = \quad 1+3\lambda \\ y = \qquad 2\lambda \\ z = -1+\;\lambda \end{cases} \rightarrow\; P = (1+3\lambda\,, -2\lambda\,, -1+\lambda)$$

a) Veamos primero si los vectores directores son paralelos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (a\,,1\,,0) \\ \vec{v}_s = (2\,,-1\,,0) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{0}{0} \rightarrow a = -2$$

Tenemos así que bien son secantes, bien se cruzan. Tomamos $P_r = (1\,,0\,,0)$ y $P_s = (2\,,0\,,-1)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a+2 \neq 0$$

Deducimos así que se cruzan.

b) Si la recta r está contenida en el plano, cualquier punto de ella está en el plano. Y los vectores directores de las rectas determinan las direcciones del plano. Así el plano π que los contiene está determinado por

Punto: $A = (-1\,,0\,,1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (1\,,2\,,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (3\,,0\,,0)$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -3y-6z+6=0 \;\rightarrow\; y+2z-2=0$$

EJERCICIO 4:

a) Es fácil pasar la recta a paramétricas: basta hacer $y=\lambda$ y pasarla al segundo miembro. Así observamos claramente un vector de director de ella. Aplicamos la condición de paralelismo de recta y plano:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (1\,,2\,,-1)\cdot(a\,,1\,,0) = 0 \;\rightarrow\; 1\cdot a + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 = 0 \;\rightarrow\; a=-2$$

Tenemos así:

Si es $a \neq -2$ entonces s y π son secantes (en un punto).

Si es $a=-2$ la recta o es paralela o está contenida en el plano. Para salir de dudas, sustituimos un punto cualquiera de la recta en la ecuación del plano:

$$P_{r_0} = (3\,,0\,,3) \;\mapsto\; \pi: 3-3=0$$

Como el punto está en el plano, la recta está contenida en el plano.

b) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta s que pasa por el punto Q y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q' intersección de r con π (la proyección de Q en π). Por último hallaremos el simétrico Q'' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{QQ''}$ es Q'.

La recta s pasa por $Q\,(-1\,,2\,,-3)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n}=(1\,,2\,,-1)$:

$$s:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\ \ \lambda \\ y=\ \ \ 2+2\lambda \\ z=-3-\ \ \lambda \end{array}\right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q':

$$P_s\;\mapsto\;\pi:-1+\lambda+4+4\lambda+3+\lambda=0\;\rightarrow\;\lambda=-1$$

Es:

$$Q'=(-2\,,0\,,-2)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{QQ''}$ es Q':

$$\frac{Q+Q''}{2}=Q'\;\rightarrow\;Q''=2Q'-Q\;\rightarrow\;Q''=(-3\,,-2\,,-1)$$