Nombre:____ ***Curso***:_____		
Matemáticas II – Geometría del espacio – 20/05/2014		

EJERCICIO 1: [3]

Considera los puntos $A\,(0\,,1\,,2)$, $B\,(0\,,1\,,3)$, $C\,(a\,,-1\,,2)$ y la recta

$$r : x = y + 2 = \frac{z-3}{2}$$

a) [1,5] Halla a para que el área del triangulo de vértices ABC sea $1.5\,\mathrm{u}^2$.

b) [1,5] Para $a = 1$, halla la intersección de la recta r con el plano que pasa por A, B y C.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos el punto $P\,(1\,,0\,,-1)$ y la recta dada por

$$s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) [1,5] Halla el punto de la recta s más cercano al punto P.

b) [1] Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta s.

EJERCICIO 3: [2]

Calcula todos los planos perpendiculares a la recta

$$t : \begin{cases} x = 10 + 5\lambda \\ y = 100 \\ z = 25 - 12\lambda \end{cases}$$

que se encuentran a 2 unidades de distancia del punto $Q\,(2\,,-7\,,1)$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad , \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas.

b) [1,25] Calcula el punto de corte cuando sean secantes.

EJERCICIO 1:

a) El área del triángulo viene dada por:

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Calculemos ese producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} = (2\,,a\,,0)$$

Aplicamos la fórmula del módulo y lo igualamos al área:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + a^2 + 0^2} = 1.5 \rightarrow \sqrt{4 + a^2} = 3 \rightarrow 4 + a^2 = 9 \rightarrow a^2 = 5 \rightarrow a = \pm\sqrt{5}$$

b) Primero obtendremos la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados:

Punto: $A\,(0\,,1\,,2)$

Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (0\,,0\,,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1\,,-2\,,0)$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} 2x + y - 1 = 0$$

Ahora pasamos la recta a paramétricas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2} \rightarrow \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -2 + \lambda \\ z &= 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Y sustituimos la coordenadas paramétricas en la ecuación del plano:

$$r \;\mapsto\; \pi : 2\lambda + \lambda - 2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$$

Concluimos que son secantes en el punto

$$P = (1\,,-1\,,5)$$

EJERCICIO 2:

a) El punto pedido es el punto Q proyección de P sobre la recta s. Pasamos primero la recta a paramétricas.

$$s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow Q = (\lambda\,,-\lambda\,,1)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_s$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \rightarrow (1-\lambda\,,\lambda\,,2) \cdot (1\,,-1\,,0) = 0 \rightarrow 1 - \lambda - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Tenemos así que $Q = \left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,1\right)$.

b) Si la recta s está contenida en el plano, el punto $P_{s_0} = (0\,,0\,,1)$ es del plano. Así, el plano π que pasa por P y contiene a s está determinado por

Punto: $P\,(1\,,0\,,-1)$

Vectores directores: $\overrightarrow{PP_{s_0}} = (-1\,,0\,,0)$, $\vec{v}_s = (-1\,,1\,,0)$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 2x+2y+z-1=0$$

EJERCICIO 3:

Como el plano π debe ser perpendicular a la recta, podemos tomar como vector normal un vector director de la ella:

$\vec{n} = \vec{v}_t = (5\,,0\,,-12)$

Así la ecuación general del plano será

$5x - 12z + d = 0$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos d:

$$\mathrm{d}\,(Q\,,\pi) = \frac{|10-12+d|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{|d-2|}{13} = 2 \;\rightarrow\; |d-2| = 26$$

Para que un valor absoluto resulte ser 26, su argumento debe ser 26 o -26. Por lo tanto:

$$|d-2| = 26 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{lllll} d-2=+26 & \rightarrow & d=28 & \rightarrow & 5x-12y+28=0 \\ d-2=-26 & \rightarrow & d=-24 & \rightarrow & 5x-12y-24=0 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 4:

a) Veamos primero si los vectores directores son paralelos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (1\,,-2\,,-1) \\ \vec{v}_s = (2\,,1\,,3) \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1} \;\rightarrow\; \vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s$$

Tenemos así que bien son secantes, bien se cruzan. Tomamos $P_{r_0} = (a\,,1\,,4)$ y $P_{s_0} = (1\,,-2\,,0)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_{s_0}P_{r_0}}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} a-1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a-2 \;\rightarrow\; a-2=0 \;\rightarrow\; a=2$$

Tenemos así:

Si es $a \neq 2$ entonces las rectas se cruzan.

Si es $a = 2$ entonces las rectas son secantes (en un punto, claro).

b) Para obtener el punto sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación continua de s:

$$\frac{2+t-1}{2} = \frac{1-2t+2}{1} = \frac{4-t}{3} \;\rightarrow\; t=1 \;\rightarrow\; P\,(3\,,-1\,,3)$$