Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 15/04/2015	

EJERCICIO 1: [3]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}$$

a) [1] Exprese y resuelva matricialmente el sistema para $m = 1$ sabiendo que en ese caso la inversa de la matriz de coeficientes es

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -15 & 24 & -14 \\ -6 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) [2] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

c) [1] Resuélvalo para $m = 3$.

d) [1] Para dicho valor de m, calcule, si es posible, una solución en la que x sea el doble de y.

EJERCICIO 2: [2]

Discuta, el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & by & - & 3z & = & b \\ -4x & + & (b+1)\,y & + & 6z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Y resuélvalo para $b = 1$.

EJERCICIO 3: [3]

Una tienda vende una clase de calcetines a 12 € el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial, y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial.

Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976 € y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

EJERCICIO 1:

a) Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \rightarrow X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -15 & 24 & -14 \\ -6 & 12 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -6m^2 + 18m \xrightarrow{|C|=0} -6m^2 + 18m = 0 \rightarrow m = 0\,, m = 3$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 3$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -9 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 3$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} 2x - 4y = 6 - 6z \\ \qquad 3y = 3 - 2z \end{cases}$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(5 - \frac{13}{3}\lambda\,,1 - \frac{2}{3}\lambda\,,\lambda\right)$$

d) Debe ser:

$$x = 2y \;\rightarrow\; 5 - \frac{13}{3}\lambda = 2 - \frac{4}{3}\lambda \;\rightarrow\; 3\lambda = 3 \;\rightarrow\; \lambda = 1$$

Sustituyendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\,,1\right)$$

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -b & -3 & b \\ -4 & b+1 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

a) Vemos primero que hay un menor de orden uno de cero:

$$\Delta_1 = \det{(2)} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la segunda fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ -4 & b+1 \end{vmatrix} = 2 - 2b \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & b \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 4b - 4$$

Caso 1: $b \neq 1$.

Hay orlados de orden 2 distintos de cero y entonces

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3$$

Es compatible indeterminado con un parámetro:

Caso 2: $b = 1$

Todos los orlados de orden 2 son cero, así:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 1 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros.

b) Del estudio anterior se deduce que S equivale al sistema formado por sólo la primera ecuación (fila del menor principal) y tiene 2 parámetros:

$$S \equiv \{2x - y - 3z = 1$$

Poniendo $x = \lambda$ y $z = \mu$:

$$(x\,,y\,,z) = (\lambda\,,2\lambda - 3\mu - 1\,,\mu)$$

EJERCICIO 3:

Sean

x el número de calcetines a 12 €

y el número de calcetines a 8.40 € $(12 \cdot 0.70 = 8.40)$

z el número de calcetines a 7.20 € $(12 \cdot 0.60 = 7.20)$

Total de calcetines es 600:

$$x + y + z = 600 \text{ [1]}$$

Total de ingreso es 5976 €:

$$12x + 8.40y + 7.20z = 5976 \text{ [2]}$$

El número de rebajados es la mitad del total:

$$y + z = 300 \text{ [3]}$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + \quad y + \quad z & = & 600 \\ 12x + 8.40y + 7.20z & = & 5976 \\ y + \quad z & = & 300 \end{array}\right\}$$

Si a la ecuación [1] le resto la [3] sale directamente

$$x = 300$$

Sustituyendo $x = 300$ en la [2] y multiplicando por 8.40 la [3] me queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 8.40x + 7.20z = 2376 \\ 8.40x + 8.40z = 2520 \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$1.2z = 144 \ \rightarrow \ z = 120$$

Luego se aplicado el 40% de descuento a 120 pares de calcetines.