Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 22/04/2015	

EJERCICIO 1: [5]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & my & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & + & mz & = & m+2 \end{array}\right\}$$

a) [1] Exprese y resuelva matricialmente el sistema para $m = 1$ sabiendo que en ese caso la inversa de la matriz de coeficientes es

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

b) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

c) [1] Resuélvalo para $m = 2$.

d) [0,5] Para dicho valor de m, calcule, si es posible, una solución en la que x e y coincidan.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (k+1)x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & 3y & - & kz & = & -k \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

b) [0,5] Resuélvalo para $k = 1$.

EJERCICIO 3: [3]

En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, una alumna obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones de los otros.

Plantee y resuelva un sistema que permita obtener la puntuación de cada problema.

EJERCICIO 1:

a) Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \rightarrow X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = m^2 - 9m + 14 \xrightarrow{|C|=0} m^2 - 9m + 14 = 0 \rightarrow m = 2\,, m = 7$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 2$ y $m \neq 7$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 7$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

c) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + 3y = 3 - z \\ 2x + 2y = 1 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\lambda\,, \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\lambda\,, \lambda \right)$$

d) Debe ser:

$$x = y \,\rightarrow\, -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\lambda = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\lambda \,\rightarrow\, -\frac{3}{4} = \frac{5}{4} \,\rightarrow\, \text{NO}$$

Como vemos, no hay una solución que cumpla eso.

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} k+1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -k & -k \end{array} \right)$$

a) Vemos primero que hay un menor de orden uno de cero:

$$\Delta_1 = \left| \; -3 \; \right| \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la segunda fila:

$$\Delta_2^1 = \left| \begin{array}{rr} k+1 & -3 \\ -2 & 3 \end{array} \right| = 3k - 3 \quad , \quad \Delta_2^2 = \left| \begin{array}{rr} -3 & 1 \\ 3 & -k \end{array} \right| = 3k - 3 \quad , \quad \Delta_2^3 = \left| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -k & -k \end{array} \right| = 0$$

Caso 1: $k \neq 1$.

Hay orlados de orden 2 distintos de cero y entonces

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

Es compatible indeterminado con un parámetro:

Caso 2: $k = 1$

Todos los orlados de orden 2 son cero, así:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 1 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros.

b) Del estudio anterior se deduce que S equivale al sistema formado por sólo la primera ecuación (fila del menor principal) y tiene 2 parámetros:

$$S \equiv \{2x - 3y + z = 1$$

Poniendo $x = \lambda$ e $y = \mu$:

$$(x\,,y\,,z) = (\lambda\,,\mu\,,1 - 2\lambda + 3\mu)$$

EJERCICIO 3:

Sean

x la puntuación del problema 1

y la puntuación del problema 2

z la puntuación del problema 3

Puntuación total 7.2:

$$x + y + z = 7.2 \text{ [1]}$$

Puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo:

$$x = 1.4y \text{ [2]}$$

Puntuación del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones de los otros:

$$z = 2\,(x + y) \text{ [3]}$$

Nos queda así el sistema siguiente que nos permitirá obtener las puntuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 7.2 \\ x \quad\quad\quad & = & 1.4y \\ z & = & 2\,(x+y) \end{array} \right.$$

Si sustituimos [2] en [3]:

$$z = 2 \cdot 2.4y = 4.8y \text{ [4]}$$

Sustituyendo ahora la x y la z en la primera ecuación:

$$1.4y + y + 4.8y = 7.2 \;\rightarrow\; 7.2y = 7.2 \;\rightarrow\; y = 1$$

Volviendo a las ecuaciones segunda y tercera:

$$x = 1.4\,,\; z = 4.8$$

Así, las puntuaciones en los tres problemas fueron 1.4 , 1 y 4.8, respectivamente.