Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 18/03/2015	

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$

b) [1,25] Justifica que A es invertible y halla su inversa. (Sugerencia: úsese el apartado anterior)

c) [0,75] Calcula razonadamente A^{50}.

d) [1] Halla la matriz X que satisface $XA = B^t$.

EJERCICIO 2:

Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1,25] Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$.

b) [1,25] Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

EJERCICIO 3:

Sabiendo que el determinante de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

es 4, calcula indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [0,5] $\det(-2A)$.

b) [0,5] $\det(A^{-1})$.

c) [0,5] $\mathrm{rg}(A^t)$.

d) [1] El determinante

$$\begin{vmatrix} 2d + 2e & 6e & 2f \\ a + b & 3b & c \\ p + q & 3q & r \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4: [1,5]

Halla el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro k:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ k & 4 & 3k & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Simplemente calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}$$

b) Obtenemos la inversa usando la igualdad anterior:

$$A^2 \cdot A = -\mathrm{I} \ \rightarrow \ -A^2 \cdot A = \mathrm{I} \ \rightarrow \ -A^2 = A^{-1} \ \rightarrow \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) De nuevo usaremos la relación del primer apartado:

$$A^{50} = A^{48} \cdot A^2 = \left(A^3\right)^{16} \cdot A = (\mathrm{I})^{33} \cdot A = \mathrm{I} \cdot A^2 = A^2$$

d) Despejemos la matriz X ya que A tiene inversa:

$$XA = B^t \ \rightarrow \ X = B^t \cdot A^{-1}$$

Operando y como ya tenemos la inversa:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Calculemos X e Y :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X - Y & = & A^t \\ 2X - Y & = & B \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -X + Y & = & -A^t \\ 2X - Y & = & B \end{array} \right.$$

Sumando:

$$X = B - A^t$$

Despejando ahora de la primera igualdad:

$$Y = X - A^t = B - 2A^t$$

Efectuando las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular Z. Despejamos:

$$AZ = BZ + A \ \rightarrow \ (A - B) \cdot Z = A \ \rightarrow \ Z = (A - B)^{-1} A$$

Realizando los cálculos:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) $|-2A| = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot |A| = -8 \cdot 4 = -32$

Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número"

b) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{I} \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{4}$$

Hemos aplicado ahí que "el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores".

c) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta así, A^t es una matriz cuadrada de orden 3 con determinante no nulo. Concluimos entonces que su rango es 3:

$$\det\left(A^t\right) = \det(A) = 4 \neq 0 \ \rightarrow \ \mathrm{rg}(A^t) = 3$$

d) Como cada término de la primera columna es una suma, separamos el determinante como suma de dos como sigue, pues un determinante es lineal por cada columna:

$$\begin{vmatrix} 2d+2e & 6e & 2f \\ a+b & 3b & c \\ p+q & 3q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2d & 6e & 2f \\ a & 3b & c \\ p & 3q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2e & 6e & 2f \\ b & 3b & c \\ q & 3q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} + 0 = 6 \cdot (-4) = -24$$

Recordemos que un "determinante es cero si tiene dos filas proporcionales" y que "al permutar dos filas el determinante cambia de signo".

EJERCICIO 4:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ k & 4 & 3k & -2 \end{pmatrix}$$

Ante todo, el rango será como máximo dos.

Es fácil observar que hay un menor de orden uno distinto de cero:

$$\Delta_1 = \det(1) \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la segunda fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2k \quad , \quad \Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 3k \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{vmatrix} = k - 2$$

Es fácil observar que todos los orlados son cero sólo cuando $k = 2$. Así:

$$\begin{array}{lllll} k \neq 2 & \rightarrow & \Delta_2^1 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 2 \\ k = 2 & \rightarrow & \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = \Delta_2^3 = 0\,, \Delta_1 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 1 \end{array}$$