Nombre:____ **Curso**:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 19/03/2015	

EJERCICIO 1:

a) [1] Razona que si una matriz cuadrada A verifica $A^2 - 2A + \mathrm{I} = \mathrm{O}$, entonces tiene inversa y determina cuál es.

b) [1,5] Comprueba que para $x = 2$ verifica la igualdad anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = \mathrm{O}$.

c) [1,5] Para $x = 0$, averigua p y q para que conmute A con la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -2 & m & -2m \\ 1-m & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) [1,5] ¿Para qué valores de m no es invertible la matriz?

b) [1,5] Estudia el rango de C según los valores de m.

EJERCICIO 3:

a) [1] Sean D y E dos matrices cuadradas tales que

$$DE = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Justifica que D tiene inversa.

b) [2] Sea F una matriz cuadrada de determinante igual a -5 y cuyas filas son f_1 , f_2, f_3 y f_4.

Determina razonadamente el determinante del doble de su traspuesta, del triple de su inversa y el de la matriz G cuyas filas son $3f_3 - 2f_2$, $2f_2$, f_1 , $-f_4$.

EJERCICIO 1:

a) Veamos que el producto de A por otra matriz es la identidad: esa matriz es, por definición, su inversa.

$$A^2-2A+\mathrm{I}=\mathrm{O} \;\rightarrow\; \mathrm{I}=2A-A^2 \;\rightarrow\; \mathrm{I}=A\cdot(2\mathrm{I}-A) \;\rightarrow\; A^{-1}=2\mathrm{I}-A$$

b) Calculemos y veamos que A cumple la igualdad anterior:

$$A^2-2A+\mathrm{I}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\-2&1&-2\\2&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-2\\-2&2&-2\\2&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Así su inversa es:

$$A^{-1}=2\mathrm{I}-A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

Para hallar X despejamos:

$$A\cdot X-2A^t=\mathrm{O} \;\rightarrow\; AX=2A^t \;\rightarrow\; X=A^{-1}\cdot 2A^t$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&0\\-2&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-6&8\\-2&-2&6\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

c) Queremos que se cumpla:

$$AB=BA \rightarrow \begin{pmatrix}-q&0&-1\\p-q-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&1&-p-1\\1&0&-q\end{pmatrix}$$

Igualando, sin escribir trivialidades ni repetidos:

$$\begin{cases}-p-1=0\rightarrow p=-1\\-q=-1\rightarrow q=1\\p-q-1=-1\xrightarrow{p=-1,q=1}-3=-1\rightarrow \text{NO}\end{cases}$$

Vemos que no hay solución, de donde deducimos que para ningún valor de p o de q conmutan A y B.

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(C)=m^3-3m^2+4 \;\rightarrow\; (m+1)\,(m-2)^2=0 \;\begin{matrix}\nearrow & m=-1\\ \searrow & m=2\end{matrix}$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si }\; m=-1 \text{ ó } m=2 \quad\rightarrow\quad \det(C)=0 \quad\rightarrow\quad \text{No existe } C^{-1}$$

$$\text{Si }\; m\neq-1 \text{ y } m\neq 2 \quad\rightarrow\quad \det(C)\neq0 \quad\rightarrow\quad \text{Sí existe } C^{-1}$$

b) Ante todo, será un número entre 1 y 3.

Para averiguar el rango, ya tenemos el determinante de la matriz. Caben distinguir tres casos:

Caso 1: $m \neq -1$ y $m \neq 2$.

Su determinante, de orden 3, es no nulo. Por ello el rango es 3.

Caso 2: $m = -1$. La matriz es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que el único determinante de orden 3 es cero pero hay un menor de orden dos no nulo:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

El mayor orden posible de un menor no nulo es 2. Luego el rango es 2.

Caso 3: $m = 2$. La matriz es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

¡Todos los menores de orden 2 son cero!

El mayor orden posible de un menor no nulo es 1. Luego el rango es 1.

EJERCICIO 3:

a) Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes, tenemos:

$$\det(D) \cdot \det(E) = -1 \;\rightarrow\; \det(D) \neq 0$$

De ahí se deduce que D tiene inversa.

b) Aplicamos que "un determinante es lineal por filas" y que "el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta"

$$\det\left(2F^t\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(F^t\right) = 16 \cdot (-5) = -80$$

En cuanto a lo del triple de su inversa, primero observemos que el producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$F \cdot F^{-1} = \mathrm{I} \rightarrow |F| \cdot |F^{-1}| = 1 \rightarrow |F^{-1}| = -\frac{1}{5}$$

Ahora, igual que antes:

$$\det\left(3F^{-1}\right) = 3^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{81}{5}$$

Finalizamos observando que podemos descomponer en suma:

$$\det[\; 3f_3 - 2f_2 \quad 2f_2 \quad f_1 \quad -f_4 \;] = \det[\; 3f_3 \quad 2f_2 \quad f_1 \quad -f_4 \;] - \det[\; 2f_2 \quad 2f_2 \quad f_1 \quad -f_4 \;]$$

El segundo es nulo por tener dos filas proporcionales y del primero podemos sacar los números de cada fila:

$$\det(G) = 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \det[\; f_3 \quad f_2 \quad f_1 \quad f_4 \;]$$

Ese determinante es $+\,5$, pues sale permutando las filas primera y tercera de F, así:

$$\det(G) = 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (+5) = -30$$