Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Integral definida – 11/03/2015	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x\cos(x)$$

Halla el área del recinto delimitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \pi$.

EJERCICIO 2: [3]

Consideremos las funciones $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x+1| \quad , \quad g(x) = -x^2 + 0.5x + 6$$

a) [1,5] Dibuja el recinto delimitado por las gráficas de ambas, obteniendo sus puntos de corte.

b) [1,5] Halla el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3:

a) [1] Halla la ecuación de la recta tangente para $x = 1$ a la función f definida por

$$f(x) = 2 + \int_1^x \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1] Sabiendo que

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 5 \quad , \quad \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

calcula

$$\int_3^5 5f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 3g(x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Halla $a > 0$ para el que el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 2a^2$$

sea igual a 9 (unidades de área).

EJERCICIO 1:

Primero calculamos los ceros de la función en $[0\,,\pi]$:

$$x\cos x = 0 \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Como tiene un cero en el interior del intervalo de integración, hay dos recintos. Por ello calcularemos separadamente la integral de la función en el intervalo $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ y en $\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$.

Hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int 2x\cos x\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{sen}\,x - \int 2\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[2x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[2x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x\Big]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = -2-\pi$$

La primera integral es positiva (gráfica sobre el eje X) y la segunda es negativa)bajo el eje X). Luego la primera proporciona el área y la segunda es la opuesta del área. Luego:

$$a\left(\mathscr{R}\right) = \pi - 2 + 2 + \pi = 2\pi \qquad \left(\mathrm{u}^2\right)$$

EJERCICIO 2:

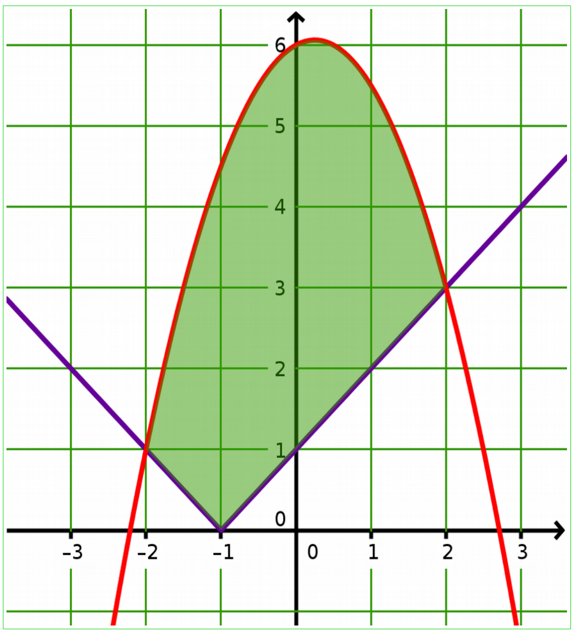
a) Primero expresamos $|x+1|$ como una función a trozos. Veamos los ceros del interior del valor absoluto:

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

Observando que la expresión $x+1$ es negativa hasta $x=-1$ y positiva a partir de $x=-1$, tenemos:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x-1 & \text{si} & x<-1 \\ x+1 & \text{si} & x\geq -1\end{array}\right.$$

Para dibujar las funciones basta con unas simples tablas de valores, obteniendo la gráfica representada aquí con Geogebra.



Vemos claramente que se cortan para $x=-2$ y $x=2$.

Si deseamos obtenerlo algebraicamente:

$$-x^2+0.5x+6 = -x-1 \xrightarrow{x<-1} x=-2$$

$$-x^2+0.5x+6 = x+1 \xrightarrow{x>-1} x=+2$$

b) Calculamos la integral entre los puntos de corte de la función superior (parábola) menos la inferior (valor absoluto). Pero separaremos en dos la integral pues el separa-fórmulas ($x = 1$) anda por medio:

$$a(\mathscr{R}) = \int_{-2}^{-1} \big(-x^2 + 0.5x + 6 - (-x-1)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \big(-x^2 + 0.5x + 6 - (x+1)\big)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathscr{R}) = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 7x\right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 5x\right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{29}{12} + \frac{45}{4} = \frac{41}{3} \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Observemos que el integrando es continuo: es una fracción racional con denominador siempre positivo. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Calculando:

$$f(1) = 2 + \int_1^1 \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2 \quad , \quad f'(1) = \frac{1+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

La recta tangente tiene de ecuación:

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \;\to\; y - 2 = \frac{1}{2}\cdot(x-1) \;\to\; y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

b) Aplicamos la aditividad respecto del intervalo para obtener las integrales que necesitamos:

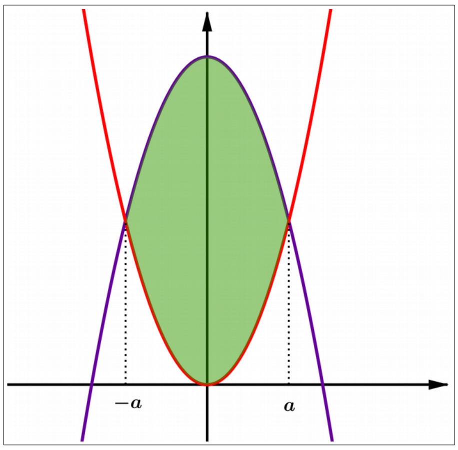
$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5\,, \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \;\to\; \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 - 2 = 3$$

$$\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 5\,, \int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \;\to\; \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 5 = -3$$

Así:

$$\int_3^5 5f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 3g(x)\,\mathrm{d}x = 5\cdot 3 - 3\cdot(-3) = 15 + 9 = 24$$

EJERCICIO 4:



Observemos que sus gráficas son dos parábolas: la de f es convexa y la g cóncava. Es fácil comprobar dónde se cortan:

$$x^2 = -x^2 + 2a^2 \;\to\; 2x^2 = 2a^2 \;\to\; x^2 = a^2 \;\to\; x = \pm a$$

Observemos que por simetría podemos considerar sólo la parte del recinto correspondiente al intervalo $[0\,, +a]$:

$$\int_0^a (-x^2 + 2a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2a^2x\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{-2a^3}{3} + 2a^3 = \frac{4a^3}{3}$$

Luego:

$$2\cdot\frac{4a^3}{3} = 9 \;\to\; a^3 = \frac{27}{8} \;\to\; a = \frac{3}{2}$$