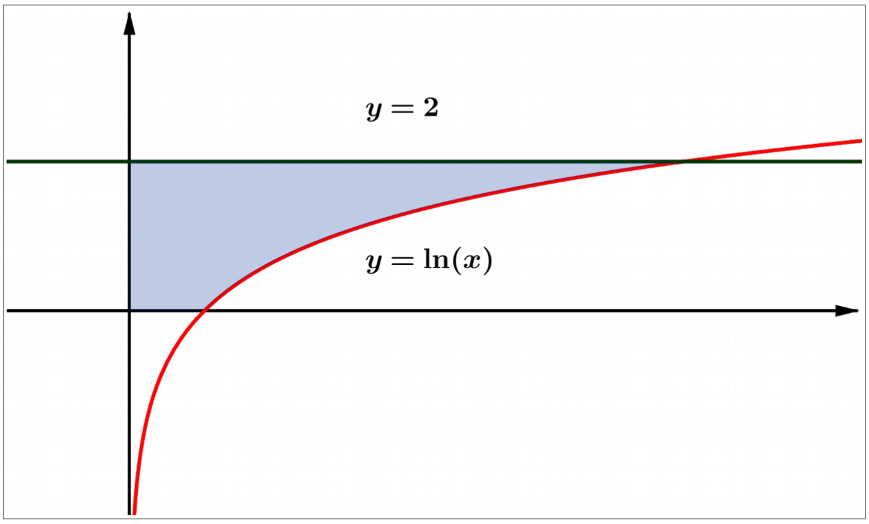
Nombre:____ **Curso**:_____

Matemáticas II – Integral definida – 17/02/2015

EJERCICIO 1: [2,5]

Halla el área de la región dibujada:



EJERCICIO 2: [3]

Consideremos la función $f : [0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$

a) [1] Demuestra que la recta $y = 0.5x + 2$ es tangente a la gráfica de f.

b) [2] Dibuja y halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la gráfica de f y la recta tangente anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1] Estudia la variación (monotonía y extremos) de la función f definida por

$$f(x) = \int_2^x \frac{3-t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_0^2 x \cdot |x-1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2]

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = 0.5x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $16/3$.

EJERCICIO 1:

En primer lugar hallemos la abscisa del corte entre la curva y la recta:

$$\ln x = 2 \;\rightarrow\; x = \mathrm{e}^2$$

En segundo lugar, el corte de la curva logarítmica con el eje de abscisas es $x = 1$.

Podemos expresar el área del recinto como la diferencia de dos áreas: la del rectángulo determinado por $y = 2$ con el eje **X** entre $x = 0$ y $x = \mathrm{e}^2$ menos la del recinto que forma y la curva logarítmica con el eje **X** entre $x = 1$ y $x = \mathrm{e}^2$:

$$a\,(\mathscr{R}) = 2 \cdot \mathrm{e}^2 - \int_1^{\mathrm{e}^2} \ln x \,\mathrm{d}x$$

Hallemos la primitiva por partes:

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow:

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}^2} = \left(\mathrm{e}^2 \cdot 2 - \mathrm{e}^2\right) - (-1) = \mathrm{e}^2 + 1$$

Luego

$$a\,(\mathscr{R}) = 2\mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e}^2 + 1\right) = \mathrm{e}^2 - 1 \quad (\mathrm{u}^2)$$

NOTA: una forma directa, es observar que como $\ln x = y \rightarrow x = \mathrm{e}^y$, el área rayada es

$$\int_0^2 \mathrm{e}^y \mathrm{d}y = \Big[\mathrm{e}^y\Big]_{y=0}^{y=2} = \mathrm{e}^2 - 1$$

EJERCICIO 2:

a) Ante todo derivamos:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

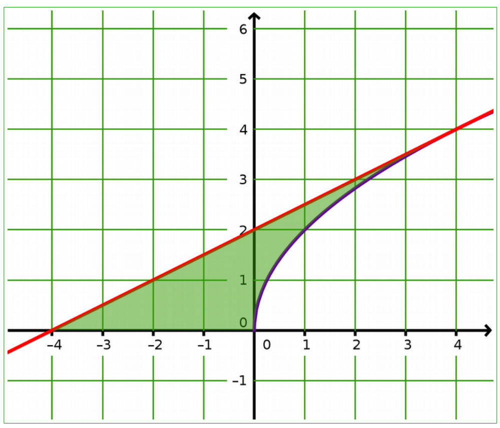
La pendiente de la tangente es igual a la derivada en el punto de tangencia:

$$f'(x) = m \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.5 \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; x = 4$$

Veamos que la recta tangente para dicho valor es la recta dada:

$$y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \;\rightarrow\; y - 4 = 0.5\,(x - 4) \;\rightarrow\; y = 0.5x + 2$$

b) La gráfica de f es parabólica. El recinto lo tenemos aquí:



Podemos expresar el área como la del triángulo de vértices $(-4\,,0)$, $(4\,,0)$ y $(4\,,4)$ menos la que forma la gráfica de g con el eje de abscisas entre $x = 0$ $x = 4$:

$$a(\mathscr{R}) = 8 \times 4 : 2 - \int_0^4 2x^{1/2}\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

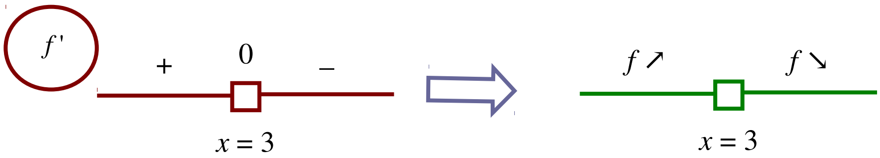
$$a(\mathscr{R}) = 16 - \left[2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{16}{3} \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Observemos que el integrando es una función continua: es una fracción racional en la que el denominador es siempre positivo. Así aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo, que nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x^2+1)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = 3$ hay un máximo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Resulta así:

$x < 1 \ \rightarrow \ |x-1| = -x+1 \ \rightarrow \ x|x+1| = x\,(-x+1) = -x^2 + x$

$x \geq 1 \ \rightarrow \ |x-1| = x-1 \ \rightarrow \ x|x-1| = x\,(x-1) = x^2 - x$

Luego separaremos la integral en dos:

$$\int_0^2 x|x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x^2+x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2-x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

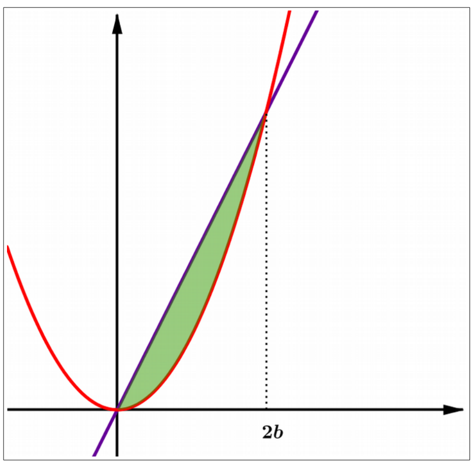
$$\int_0^2 x|x-1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

EJERCICIO 4:

Es fácil comprobar dónde se cortan la parábola y la recta:

$$0.5x^2 = bx \ \rightarrow \ 0.5x^2 - bx = 0 \ \rightarrow \ x(0.5x - b) = 0 \ \rightarrow \ x = 0\,, x = 2b$$

La gráfica será como se muestra a continuación:



El área del recinto comprendido entre ambas es:

$$a(\mathscr{R}) = \int_0^{2b} \left(bx - 0.5x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$$

Aplicando Barrow:

$$\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2b} = 2b^3 - \frac{4b^3}{3} = \frac{2b^3}{3}$$

Igualando y despejando:

$$2b^3 = 16 \ \rightarrow \ b = \sqrt[3]{8} = 2$$

Concluimos que es

$$b = 2$$