Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 16/12/2014

EJERCICIO 1:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 2:

Calculemos la primitiva de la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$$

cuya gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{5x}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = t^2$.

EJERCICIO 4:

Calcula

$$\int \frac{2}{\mathrm{e}^x + 3}\,\mathrm{d}x$$

mediante un cambio de variable adecuado que la convierta en la integral de una función racional.

EJERCICIO 5:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(4x) + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4\,\mathrm{e}^{-x} - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 1:

a) Es una integral compuesta de tipo seno/coseno con $u = \ln x$:

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\ln x) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-tangente con $u = \sqrt{3}x$:

$$\int \frac{5}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,\mathrm{d}x \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = 1 + \mathrm{e}^{2x}$:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = \operatorname{sen} x$:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{sen} x)^{-4}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{(\operatorname{sen} x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

EJERCICIO 2:

Integramos en primer lugar usando la integración por partes, donde x es la parte a derivar y $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ la parte a integrar:

$$I = \int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = x\tan x - \int 1\cdot\tan x\,\mathrm{d}x = x\tan x - \int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

Llamando F a la primitiva buscada:

$$F(0) = 1 \;\to\; 0 + \ln 1 + C = 1 \to C = 1$$

Queda

$$F(x) = x\tan x + \ln|\cos x| + 1$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = t^2 \to x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{5t^2}{2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{10t^3}{t+2}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$10t^3 : (t+2) \;\to\; \begin{cases} c(t) = 10t^2 - 20t + 40 \\ r = -80 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int\left(10t^2 - 20t + 40 + \frac{-80}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 40t - 80\ln|t+2| + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{5x}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\sqrt{x}^3 - 10x + 40\sqrt{x} - 80\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + C$$

EJERCICIO 4:

Hagamos

$$t = \mathrm{e}^x \to \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

multiplicando el numerador y el denominador por e^x nos será más fácil hacer el cambio:

$$\int \frac{2}{\mathrm{e}^x + 3}\,\mathrm{d}x \int \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t\,(t+3)}\,\mathrm{d}t \text{ (*)}$$

Ahora hemos de calcular esa integral de función racional. Para ello descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t\,(t+3)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+3} \text{ (**)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2 = a\,(t+3) + bt \longrightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0 \to 2 = 3a \to a = \dfrac{2}{3} \\ \text{si } t = -3 \to 2 = -3b \to b = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int \frac{\frac{2}{3}}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{-\frac{2}{3}}{t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\ln(t) - \frac{2}{3}\ln(t+3) + C$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$I = \frac{2}{3}\ln(\mathrm{e}^x) - \frac{2}{3}\ln(\mathrm{e}^x + 3) + C = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\ln(\mathrm{e}^x + 3) + C$$

EJERCICIO 5:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\cos(4x) + 2x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ -4\,\mathrm{e}^{-x} - 2x + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \;\to\; -4 - 0 + b = 0 \;\to\; b = 4$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \;\to\; -\frac{1}{4} + a = -4 + b \;\xrightarrow{b=-4}\; a = \frac{1}{4}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\cos(4x) + 2x + \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x < 0 \\ -4\,\mathrm{e}^{-x} - 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$