EJERCICIO 1:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-9x^4}}\, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x}\, \mathrm{d}x$

EJERCICIO 2:

Calculemos la primitiva de la función definida por

$$f(x) = \cos(\ln x)$$

cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x^2 - 1 = t^2$.

EJERCICIO 4:

Calcula

$$\int \frac{5}{2-\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x$$

mediante un cambio de variable adecuado que la convierta en la integral de una función racional.

EJERCICIO 5:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 3\cos(2x) - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathrm{e}^{5x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica corta al eje de ordenadas en $y = 1$.

EJERCICIO 1:

a) Es una integral compuesta de tipo seno/coseno con $u = \mathrm{e}^x - 1$:

$$\int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = -\int -\mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = \cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 3x^2$:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-9x^4}} \,\mathrm{d}x \int \frac{2x}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} \int \frac{6x}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \operatorname{arcsen}\left(3x^2\right) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = 1 + \operatorname{sen}(2x)$:

$$\int \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{sen}(2x)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = \ln x$:

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x} \,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} (\ln x)^5 + C$$

EJERCICIO 2:

Integramos usando la integración por partes, donde 1 es la parte a integrar y $\cos(\ln x)$ la parte a derivar:

$$I = \int 1 \cdot \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + \int x \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x$$

Ahora volvemos a aplicar el método a esta segunda integral de nuevo con 1 es la parte a integrar y $\operatorname{sen}(\ln x)$ la parte a derivar

$$I = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int x\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - I$$

Despejando I:

$$\int x\cos(\ln x) \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(\ln x) + C$$

Llamando F a la primitiva buscada:

$$F(1) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot \cos 0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 0 + C = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} + C = 0 \;\rightarrow\; C = -\frac{1}{2}$$

Queda

$$F(x) = \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x^2 - 1 = t^2 \rightarrow 2x \,\mathrm{d}x = 2t \,\mathrm{d}t \rightarrow x \,\mathrm{d}x = t \,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{t}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$t:(1+t)\ \rightarrow\ \begin{cases} c=1 \\ r=-1 \end{cases}$$

Así:

$$I=\int\left(1+\frac{-1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=t-\ln|1+t|+C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t=\sqrt{x^2-1}$:

$$\int\frac{x}{2+\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-1}-\ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

EJERCICIO 4:

Hagamos

$$t=\mathrm{e}^x\rightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

multiplicando el numerador y el denominador por e^x nos será más fácil hacer el cambio:

$$\int\frac{5}{2-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\int\frac{5\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{5}{t\,(2-t)}\,\mathrm{d}t\ (*)$$

Ahora hemos de calcular esa integral de función racional. Para ello descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5}{t\,(2-t)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{2-t}\ (**)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$5=a\,(2-t)+bt\ \longrightarrow\ \begin{cases} \text{si } t=0\rightarrow 5=2a\rightarrow a=\dfrac{5}{2} \\ \text{si } t=2\rightarrow 5=2b\rightarrow b=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I=\int\frac{\frac{5}{2}}{t}\,\mathrm{d}t-\int\frac{-\frac{5}{2}}{2-t}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\ln|t|-\frac{5}{2}\ln|2-t|+C$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$I=\frac{5}{2}\ln(\mathrm{e}^x)-\frac{5}{2}\ln|2-\mathrm{e}^x|+C=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}\ln|2-\mathrm{e}^x|+C$$

EJERCICIO 5:

Integrando cada trozo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)-2x+a & \text{si}\quad x<0 \\ \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{5x}+b & \text{si}\quad x\geq 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica corta al eje de ordenadas en $y=1$:

$$f(0)=1\ \rightarrow\ \frac{1}{5}+b=1\ \rightarrow\ b=\frac{4}{5}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \ \to \ 0 - 0 + a = \frac{1}{5} + b \ \xrightarrow{b=4/5} \ a = 1$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x) - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{5x} + \dfrac{4}{5} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$