Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 13/11/2014	

EJERCICIO 1:

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + 1} \qquad (x \neq -1)$$

a) [1,25] Determina los valores de a y b sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(2\,,8)$.

b) [1,25] Para $a = 2$ y $b = 16$ obtén las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 2:

Consideremos la función $f\,:\,[-1\,,4] \;\rightarrow\; \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = x^2|x - 3|$$

a) [1] Estudia su derivabilidad.

b) [1] Estudia su monotonía y determina sus valores extremos.

c) [0,5] Realiza un esbozo de la gráfica.

EJERCICIO 3:

a) [1,5] Consideremos la función $f\,:\,(0\,,+\infty) \;\rightarrow\; \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 + 4\ln x$$

Obtén la ecuación de la recta tangente a su gráfica con pendiente mínima.

b) [1] Estudia razonadamente los intervalos de curvatura de una función f cuya derivada tiene por gráfica una parábola convexa que corta al eje de abscisas para $x = 1$ y $x = 5$. ¿Tiene f puntos de inflexión?

EJERCICIO 4:

Tomamos un segmento de longitud 10 cm y lo dividimos en dos trozos A y B. Construimos sobre dicho segmento un semicírculo cuyo diámetro es A y un cuadrado cuya base es B.

Halla las longitudes de A y de B con las que conseguimos que la suma de las áreas de las dos figuras construidas sea mínima.

EJERCICIO 1:

Primero, derivemos la función:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x+1} \;\to\; f'(x) = \frac{ax^2+2ax-b}{(x+1)^2}$$

a) Si en $(2\,,8)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada para $x = 2$ es cero: $\quad f'(2) = 0 \;\to\; \dfrac{8a-b}{9} = 0 \;\to\; 8a - b = 0$ [*]

La gráfica pasa por el punto $(2\,,8)$: $\quad f(2) = 8 \;\to\; \dfrac{4a+b}{3} = 8 \;\to\; 4a + b = 24$ [**]

Es fácil obtener de [*] y [**] que

$$a = 2\,,\; b = 16$$

b) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+16}{x+1} = \left[\frac{18}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = -1$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+16}{x+1} \overset{*}{=} \pm\infty$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador > grado denominador).

Concluimos que no hay asíntota horizontal.

<u>Asíntota oblicua</u>: podría haber una asíntota $y = mx + n$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+16}{x^2+x} \overset{*}{=} \frac{2}{1} = 2$$

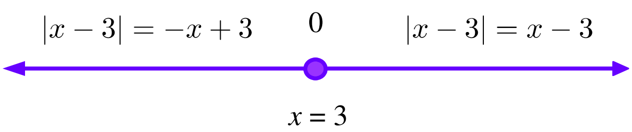
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+16}{x+1} - 2x\right) \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x+16}{x+1} \overset{*}{=} \frac{-2}{1} = -2$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador = grado denominador)

Concluimos que $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua.

EJERCICIO 2:

Primero, expresemos como una función a trozos. Observemos:



Luego

$$f(x) = x^2|x-3| = \begin{cases} -x^3+3x & \text{si} \quad -1 \le x < 3 \\ x^3 - 3x & \text{si} \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Continuidad: sólo podría ser discontinua para $x = 3$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=3}$

Valor: $f(3) = 3^2 - 9 = 0$

Límites: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \begin{cases} f(3_-) = -3^2 + 9 = 0 \\ f(3_+) = 3^2 - 9 = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 3$.

Derivabilidad: podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si} \quad 3 < x < 4 \end{cases}$$

Para $x = 3$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

D.L. $\begin{cases} f'(3_-) = -27 + 18 = -9 \\ f'(3_+) = 27 - 18 = +9 \end{cases}$

Concluimos que f no es derivable para $x = 3$ (es un punto *anguloso*).

b) Para analizar la variación de la función estudiemos el signo de la derivada.

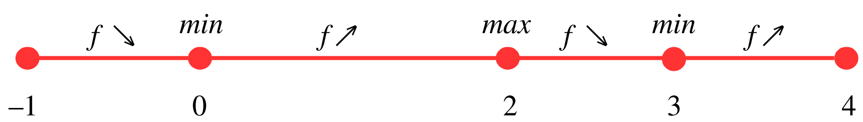
Ceros:

$-1 < x < 3 \to -3x^2 + 6x = 0 \to \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

$3 < x < 4 \to 3x^2 - 6x = 0 \to \left| \begin{array}{l} x = 0 \to \text{no} \\ x = 2 \to \text{no} \end{array} \right.$

Intervalos de signos de la derivada:

De ahí deducimos la monotonía de la función:



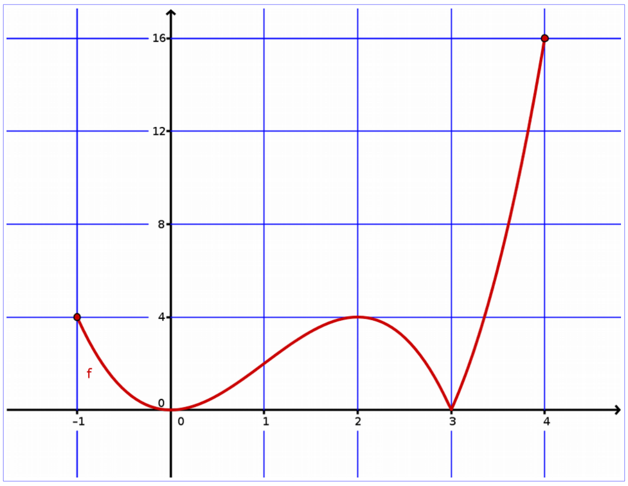
En el esquema de monotonía apreciamos los extremos interiores de la función (baja+sube=mínimo y sube+baja=máximo). En la siguiente tabla de variación los tenemos todos:

x	–1		0		2		3		4
y	4	↘	0	↗	4	↘	0	↘	16

Mínimos absolutos: $(0\,,0)$ y $(3\,,0)$

Máximo aboluto: $(4\,,16)$

c) Teniendo en cuenta el esquema de variación, aquí un esbozo de la gráfica (escala X:Y=1:4).



EJERCICIO 3:

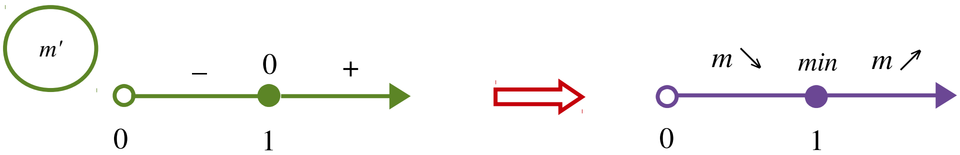
a) La pendiente de la tangente viene dada por la derivada:

$$m = f'(x) = 4x + \frac{4}{x}$$

Para que sea mínima, su derivada debe ser cero:

$$m' = f''(x) = 4 - \frac{4}{x^2} = 0 \to 4 = \frac{4}{x^2} \to 4x^2 = 4 \xrightarrow[x>0]{} x = 1$$

Comprobemos:



Luego la recta pedida es la tangente para $x = 1$:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

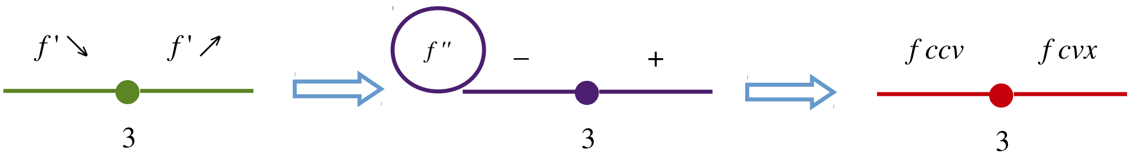
Sustituyendo:

$$y - 2 = 8 \cdot (x - 1)$$

Y simplificando

$$y = 8x - 6$$

b) De la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta un punto de inflexión para $x = 3$.

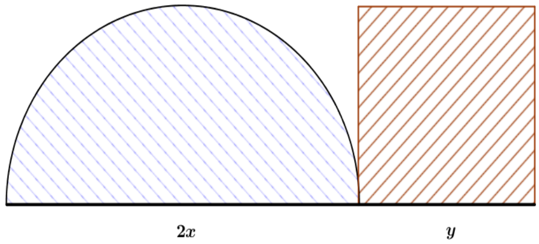
EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x al radio del semi-círculo e y lado del cuadrado. Así debemos minimizar

$$S = S_{\text{semi-círc}} + S_{\text{cuadr}} = \frac{1}{2}\pi x^2 + y^2$$

[Ligadura]



Si el radio es x entonces el diámetro es $2x$ y junto con el lado del cuadrado ocupan todo el segmento, tal y como vemos en la figura. Así:

$$2x + y = 10 \rightarrow y = 10 - 2x$$

[Expresión de la función]

La función que debemos <u>minimizar</u> es, pues:

$$S = \frac{1}{2}\pi x^2 + (10 - 2x)^2 = \frac{1}{2}\pi x^2 + 4x^2 - 40x + 100$$

[Derivadas]

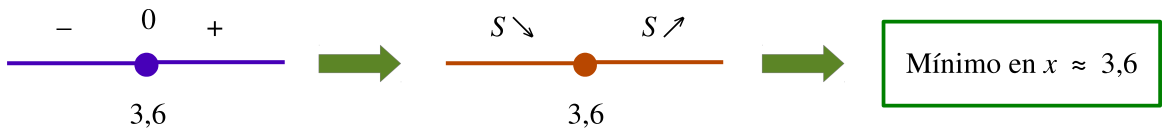
Derivamos:

$$S' = \pi x + 8x - 40 = (\pi + 8)\, x - 40$$

E igualamos a cero:

$$(\pi + 8)\, x - 40 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{40}{\pi + 8} \approx 3.6$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Conclusión]

Así que el trozo A debe medir $2x = \dfrac{80}{\pi + 8}$ cm y B debe medir $10 - 2x = 10 - \dfrac{80}{\pi + 8} = \dfrac{10\pi}{\pi + 8}$ cm.