Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 20/10/2014	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sea la función $f : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-4}{x+3} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1,25] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2$$

a) [1,5] Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(2\,,3)$.

b) [1] Obtén la ecuación de la normal a su gráfica paralela a $x + 4y - 1 = 0$.

EJERCICIO 4: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^x - x - 1} \text{ si } x \neq 0 \quad , \quad f(0) = k$$

¿Para qué valor de k es la función continua en el origen?

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x=-3$ (cero del denominador) y para $x=1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en éstos:

$\boxed{x=-3}$

Valor: $f(-3) = \text{ no existe}$

Límites: $$\lim_{x\to -3} f(x) \begin{cases} f(-3_-) = \dfrac{-16}{-0} = +\infty \\ f(-3_+) = \dfrac{-16}{+0} = -\infty \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=-3$.

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) = \dfrac{4-4}{1+3} = 0$

Límites: $$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} f(1_-) = \dfrac{0}{4} = 0 \\ f(1_+) = \dfrac{\ln 1}{1+1} = 0 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x=1$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{(x+3)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para $x=-3$, como no es continua no puede ser derivable.

Para $x=1$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(1_-) = \dfrac{16}{4^2} = 1 \\ f'(1_+) = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Concluimos que f no es derivable para $x=1$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como hay límite infinito en el cero del denominador:

$x=-3$

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-4}{x+3} = \frac{4}{1} = 4 \qquad \to \qquad y=4 \text{ para } x\to-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0 \qquad \to \qquad y=0 \text{ para } x\to-\infty.$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

EJERCICIO 2:

En primer lugar, como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 2$ y por ello:

$$f(2_-) = f(2_+) \;\rightarrow\; 2\cos 0 = \sqrt{a \cdot 2 + b} \;\rightarrow\; \sqrt{2a + b} = 2 \text{ [*]}$$

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\left(x^2 - 4\right) - 2x^2 \operatorname{sen}\left(x^2 - 4\right) & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{ax + b}} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(2_-) = \cos 0 = 1 \\ f'(2+) = \dfrac{a}{2\sqrt{2a + b}} \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 2$ deben coincidir:

$$\frac{a}{2\sqrt{2a + b}} = 1 \text{ [**]}$$

Ahora sustituimos en [**] la raíz:

$$\frac{a}{2\sqrt{2a + b}} = 1 \xrightarrow{\sqrt{2a+b}=2} \frac{a}{2 \cdot 2} = 1 \;\rightarrow\; a = 4$$

Ahora volvemos a [*] y obtenemos ya el valor de b:

$$\sqrt{2 \cdot 4 + b} = 2 \;\rightarrow\; \sqrt{8 + b} = 2 \;\rightarrow\; 8 + b = 4 \;\rightarrow\; b = -4$$

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es:

$$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; f'(x) = 2x$$

a) Importante: el punto es exterior a la parábola, desconocemos el punto de tangencia. La tangente será:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a) \;\rightarrow\; y - a^2 = 2a\,(x - a)$$

Como esa tangente debe pasar por el punto P, sustituimos en ella $x = 2$ e $y = 3$:

$$3 - a^2 = 2a\,(2 - a) \;\rightarrow\; a^2 - 4a + 3 = 0 \;\rightarrow\; a = 1\,,\, a = 3$$

Como vemos hay dos rectas tangentes a la curva que pasan por P.

Para $a = 1$:

$$y - 1^2 = 2 \cdot 1 \cdot (x - 1) \;\rightarrow\; y = 2x - 1$$

Para $a = 3$:

$$y - 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot (x - 3) \;\rightarrow\; y = 6x - 9$$

b) La normal tendrá la misma pendiente que esa recta:

$$x + 4y = 0 \;\rightarrow\; y = -\frac{x}{4} \;\rightarrow\; m = -\frac{1}{4}$$

La recta normal es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Por ello su pendiente es:

$$m = -\frac{1}{f'(a)} \;\rightarrow\; -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2a} \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2$$

La fórmula de la recta normal:

$$y - f(2) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y - 4 = -\frac{1}{4}\,(x - 2) \;\rightarrow\; x + 4y - 18 = 0$$

EJERCICIO 4:

El valor para $x = 0$ es:

$$f(0) = k$$

El límite para $x \to 0$ es:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^x - x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\mathrm{e}^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^x} = \frac{2}{1} = 2$$

En [*] hemos aplicado la Regla de L'Hôpital.

Si $k = 2$ entonces valor y límite coinciden y por ello la función es continua para $x = 0$.

Observemos que si $k \neq 2$ entonces entonces no coinciden valor y tendencia, habiendo por ello una discontinuidad evitable (un agujero en la gráfica) para $x = 0$.