Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II ±Ampliación Derivadas ±15/10/2014	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sea la función $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1,25] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{2x} + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + b \ln x$$

a) [1,5] Calcula a y b sabiendo que la recta tangente a su gráfica para $x = 1$ es

$$r : 3x - 2y - 1 = 0.$$

b) [1] Para $a = 0$ y $b = 4$, obtén la ecuación de la tangente a su gráfica que es paralela a

$$s : 4x - y = 0.$$

EJERCICIO 4: [2]

Calcula, según los valores de a, el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+a)\ln x}{\mathrm{e}^{1-x} + x - 2}$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x=-1$ (cerro del denominador) y para $x=0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $f(-1)=$ no existe

Límites: $$\lim_{x\to -1} f(x) \begin{cases} f(-1_-)=\dfrac{-1}{-0}=+\infty \\ f(-1_+)=\dfrac{-1}{+0}=-\infty \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=-1$.

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0)=(0+2)\,\mathrm{e}^0=2$

Límites: $$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0_-)=\dfrac{2}{1}=2 \\ f(0_+)=(0+2)\,\mathrm{e}^0=2 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x=0$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Para $x=-1$, como no es continua no puede ser derivable.

Para $x=0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(0_-)=\dfrac{1}{1^2}=1 \\ f'(0_+)=(-1)e^{-0}=-1 \end{cases}$$

Concluimos que f no es derivable para $x=0$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como hay límite infinito en el cero del denominador:

$x=-1$

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}=[+\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\mathrm{e}^x}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{*}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y=3$ para $x\to-\infty$

$y=0$ para $x\to+\infty$

EJERCICIO 2:

En primer lugar, como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 0$ y por ello:

$$f(0_-) = f(0_+) \ \rightarrow \ a \cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0} + 1 = \frac{b}{0+1} \ \rightarrow \ a + 1 = b \ [*]$$

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2a\,\mathrm{e}^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-b}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0_-) = 2a \cdot \mathrm{e}^0 = 2a \\ f'(1+) = \dfrac{-b}{1} = -b \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 1$ deben coincidir:

$$-\,b = 2a \ \rightarrow \ b = -2a \ [**]$$

De [*] y [**] obtenemos fácilmente $a = -\dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{2}{3}$.

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es, para $x > 0$:

$$f(x) = ax^2 + b\ln x \ \xrightarrow{D} \ f'(x) = 2ax + \frac{b}{x}$$

a) Calculemos a y b.

La recta tangente toca a la gráfica en el punto de tangencia, así:

$$\text{si} \ \ x = 1 \ \overset{r}{\mapsto} \ 3 \cdot 1 - 2y - 1 = 0 \ \rightarrow \ y = 1 \ \rightarrow \ f(1) = 1 \ \rightarrow \ a \cdot 1^2 + b\ln 1 = 1 \ \rightarrow \ a = 1$$

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia:

$$m = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ f'(1) = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ 2 + b = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ b = -\frac{1}{2}$$

b) En este caso:

$$f(x) = 4\ln x \ \xrightarrow{D} \ f'(x) = \frac{4}{x}$$

La tangente tendrá la misma pendiente que esa recta:

$$4x - y = 0 \ \rightarrow \ y = 4x \ \rightarrow \ m = 4$$

En el punto de tangencia la derivada es igual a la pendiente de la tangente:

$$f'(x) = m \ \rightarrow \ \frac{4}{x} = 4 \ \rightarrow \ 4x = 4 \ \rightarrow \ x = 1$$

La fórmula de la recta tangente:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \rightarrow y - 0 = 4 \cdot (x-1) \rightarrow y = 4x - 4$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{(x+a)\ln x}{\mathrm{e}^{1-x} + x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \ln x + (x+a)\cdot \dfrac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1-x}\cdot(-1)+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x + \dfrac{x+a}{x}}{-\mathrm{e}^{1-x}+1} = \left[\frac{1+a}{0}\right]$$

Debemos distinguir aquí dos casos:

Si $a \neq -1$ eso es un límite infinito:

$$L = \left[\frac{1+a}{0}\right] = \pm\infty$$

Si $a = -1$ eso es una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\mathrm{e}^{1-x}} = \frac{1+1}{1} = 2$$