Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Geometría del espacio – 22/05/2014	

EJERCICIO 1: [4]

Consideremos los puntos

$$A=(1\,,0\,,1) \quad , \quad B=(2\,,-1\,,1) \quad , \quad C=(-1\,,1\,,2) \quad , \quad D=(1\,,-1\,,-1)$$

a) [1] Comprueba que no son coplanarios.

b) [1,5] Halla el simétrico de D respecto del plano π que pasa por los otros tres.

c) [1,5] Si ABC son los vértices consecutivos de un paralelogramo, halla su área. ¿Es un rectángulo?

EJERCICIO 2: [3]

Sean las rectas de ecuaciones

$$r:\left\{\begin{array}{r} x-ay=1 \\ z=0 \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{ll} x= & 2+2\lambda \\ y= & \quad -\ \lambda \\ z=-1 & \end{array}\right.$$

a) [1,5] Discute su posición relativa.

b) [1,5] Para $a=-2$ halla la distancia entre ambas.

EJERCICIO 1: [3]

Consideremos

$$r:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+1 \quad , \quad \pi_1: x-y+3z+7=0 \quad , \quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-4+\lambda-3\mu \\ y=1+\lambda \\ z=\mu \end{array}\right.$$

Determina el punto de la recta que equidista de los planos.

EJERCICIO 1:

a) Como en el segundo apartado lo necesitaremos, vamos a obtener la ecuación general del plano que pasa por los tres primeros.

Punto: $A = (1\,,0\,,1)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{AB}\vec{v}_s = (1\,,-1\,,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{simplificando} -x-y-z+2=0 \rightarrow x+y+z-2=0$$

Ahora comprobamos si el punto D está en ese plano:

$$D = (1\,,-1\,,-1) \mapsto : \pi : 1-1+1-2 \neq 0 \rightarrow D \notin \pi$$

Concluimos entonces que no son coplanarios (pues D no está en el mismo plano que los otros tres).

b) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto D y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de r con π (la proyección de D en π). Por último hallaremos el simétrico P' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q.

La recta r pasa por el punto $D = (1\,,-1\,,-1)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (1\,,1\,,1)$:

$$r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r \mapsto \pi : 1+\lambda-1+\lambda-1+\lambda-2=0 \rightarrow 3\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

Es:

$$Q = (2\,,0\,,0)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \rightarrow P' = 2Q - P \rightarrow P' = (3\,,1\,,1)$$

c) Si ABC son vértices consecutivos, entonces AB y BC son lados no paralelos (**cuidado**: AC no es un lado, es una diagonal). Así, el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{BA} = (-1\,,1\,,0)$ y $\overrightarrow{BC} = (-3\,,2\,,1)$:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k} = (1\,,1\,,1)$$

Así:

$$\mathscr{A} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \quad \text{(u.a.)}$$

Para comprobar si es un rectángulo, veamos si dos de sus lados son perpendiculares:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1\,,1\,,0)\cdot(-3\,,2\,,1)=(-1)\cdot(-3)+1\cdot 2+0\cdot 1=5$$

Tenemos así:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\neq 0\ \rightarrow\ \overrightarrow{BA}\not\perp\overrightarrow{BC}$$

EJERCICIO 2:

Antes de nada, vamos a pasar la recta r a paramétricas:

$$r:\left\{\begin{array}{r} x-ay=1\\ z=0\end{array}\right.\ \xrightarrow{y=\mu}\ r:\left\{\begin{array}{l} x=1+a\mu\\ y=\qquad\ \mu\\ z=0\end{array}\right.$$

a) Veamos en primer lugar si los vectores directores son dependientes (proporcionales):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=(a\,,1\,,0)\\ \vec{v}_s=(2\,,-1\,,0)\end{array}\right\}\rightarrow\ \vec{v}_r\parallel\vec{v}_s\ \rightarrow\ \frac{a}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{0}{0}\ \rightarrow\ a=-2$$

Tenemos así que si $a=-2$ las rectas son paralelas (fácil observar que no son coincidentes).

Si $a\neq-2$ las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos $P_r=(1\,,0\,,0)$ y $P_s=(2\,,0\,,-1)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix}-1&0&1\\ a&1&0\\ 2&-1&0\end{vmatrix}=a+2\neq 0$$

Deducimos así que en este caso se cruzan. Resumimos:

$$a=-2\ \rightarrow\ \text{paralelas}$$

$$a\neq-2\ \rightarrow\ \text{se cruzan}$$

b) Sabemos de lo anterior que son paralelas, así para hallar la distancia entre ellas basta tomar un punto de una recta y calcular la distancia a la otra.

Tomemos el punto $P_r=(1\,,0\,,0)$ y calculemos su proyección Q sobre s. Será:

$$Q=(2+2\lambda\,,-\lambda\,,-1)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{P_rQ}\perp\vec{v}_s$:

$$\overrightarrow{P_rQ}\cdot\vec{v}_s=0\ \rightarrow\ (2+2\lambda\,,-\lambda\,,-1)\cdot(2\,,-1\,,0)=0\ \rightarrow\ 5\lambda+2=0\ \rightarrow\ \lambda=-\frac{2}{5}$$

Tenemos así que $\overrightarrow{P_rQ}=\left(\frac{1}{5}\,,\frac{2}{5}\,,-1\right)$.

Así:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s)=\mathrm{d}\,(P_r\,,s)=|\overrightarrow{P_rQ}|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

EJERCICIO 3:

Pasando la recta a paramétricas veremos cómo es el punto buscado:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \;\rightarrow\; r: \begin{cases} x = & 1+3\lambda \\ y = & \quad\;\; 2\lambda \\ z = -1+ & \lambda \end{cases} \;\rightarrow\; P = (1+3\lambda\,, -2\lambda\,, -1+\lambda)$$

Los planos a los que equidista P son:

$\pi_1 : x - y + 3z + 7 = 0$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} x - y + 3z + 5 = 0$$

Se verifica:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi_1) = \mathrm{d}\,(P\,,\pi_2) \;\rightarrow\; \frac{|1+3\lambda-2\lambda-3+3\lambda+7|}{\sqrt{11}} = \frac{|1+3\lambda-2\lambda-3+3\lambda+5|}{\sqrt{11}}$$

Simplificando:

$$|4\lambda+5| = |4\lambda+3| \begin{array}{l} \nearrow \quad 4\lambda+5 = 4\lambda+3 \;\rightarrow\; \text{no} \\ \searrow \quad 4\lambda+5 = -4\lambda-3 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo:

$$P = (-2\,, -2\,, -2)$$