Nombre:____ **_Curso_**:_____

Matemáticas II – Geometría del espacio – 22/05/2014

EJERCICIO 1: [3,5]

Consideremos

$$P = (1\,,0\,,-1) \quad , \quad r : x+2 = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4} \quad , \quad \pi : 2x+3y+z-6=0$$

a) [1,25] Halla el área del triángulo determinado por el plano π y los ejes coordenados.

b) [1,25] Calcula la distancia de la recta al plano.

c) [1] Obtén la ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a r y es paralela a π.

EJERCICIO 2: [3,25]

Sean las rectas de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{r} x+y=a \\ z=2 \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -\lambda \end{array} \right.$$

a) [1,25] Discute su posición relativa.

b) [1] Para $a=-3$ obtén el punto en que se cortan.

c) [1] También para dicho valor de a, halla la ecuación general del plano que las contiene.

EJERCICIO 3: [3,25]

Consideremos

$$P = (-1\,,1\,,0) \quad , \quad r : \left\{ \begin{array}{r} x-y=1 \\ z=2 \end{array} \right. \quad , \quad \pi : x+y+z=3$$

a) [1,25] Calcula las coordenadas del simétrico de P respecto de r.

b) [1] Halla los puntos de r que distan 3 unidades de P.

c) [1] Obtén la medida del ángulo determinado por r y π.

EJERCICIO 1:

Consideremos

$$P = (1\,,0\,,-1) \quad , \quad r: x+2 = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4} \quad , \quad \pi: 2x+3y+z-6=0$$

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y=z=0 \;\mapsto\; \pi: 2x-6=0 \;\to\; x=3 \;\to\; A=(3\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x=z=0 \;\mapsto\; \pi: 3y-6=0 \;\to\; y=3 \;\to\; B=(0\,,2\,,0)$

Corte con eje Z: $x=y=0 \;\mapsto\; \pi: z-6=0 \;\to\; z=6 \;\to\; C=(0\,,0\,,6)$

El área del triángulo ABC es la mitad de la del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} + 18\vec{\jmath} + 6\vec{k} = (12\,,18\,,6)$$

Así:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+18^2+6^2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = 3\sqrt{14} \quad \text{(u.a.)}$$

b) Veamos antes si la recta es paralela o no. Usamos la condición de paralelismo:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 1\cdot 4 = 0 \;\to\; r \parallel \pi$$

Así, para hallar la distancia de r a π basta calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Tomamos, por ejemplo, $P_{0r} = (-2\,,0\,,0)$:

$$\mathrm{d}\,(r\,,\pi) = \mathrm{d}\,(P_{0r}\,,\pi) = \frac{|2\cdot(-2)+3\cdot 0+0-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7} \quad \text{(u.a.)}$$

c) Ya tenemos un punto de la recta s que se quiere hallar: $P=(1\,,0\,,-1)$. Intentamos ahora obtener un vector director:

$$\left.\begin{array}{lcl} s \perp r & \to & \vec{v}_s \perp \vec{v}_r \\ s \parallel \pi & \to & \vec{v}_s \perp \vec{n} \end{array}\right\} \to \vec{v}_s \parallel \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-14\,,7\,,7)$$

Así, la ecuación de la recta s pedida es:

$$s: \frac{x-1}{-14} = \frac{y}{7} = \frac{z+1}{7}$$

EJERCICIO 2:

Antes de nada, vamos a pasar la recta r a paramétricas:

$$r: \left\{\begin{array}{r} x+y=a \\ z=2 \end{array}\right. \xrightarrow{y=\mu} r: \left\{\begin{array}{l} x = \quad\;\; \mu \\ y = a-\mu \\ z = 2 \end{array}\right.$$

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r = (1\,,-1\,,0)$ y $\vec{v}_s = (1\,,1\,,-1)$. Es

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1} \;\rightarrow\; \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r = (0\,,a\,,2)$ y $P_s = (1\,,0\,,0)$ y calculamos

$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a+3$$

Tenemos entonces dos casos:

$a = -3 \;\rightarrow\; \Delta = 0 \;\rightarrow\;$ secantes
$a \neq -3 \;\rightarrow\; \Delta \neq 0 \;\rightarrow\;$ se cruzan

b) Sabemos de lo anterior que son secantes. Colocamos $a = -3$ e igualamos las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& 1+\lambda \\ -3-\mu &=& \lambda \\ 2 &=& -\lambda \end{array}\right. \;\rightarrow\; \lambda = -2\,,\ \mu = -1$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos rectas, se obtiene que ambas se cortan en el punto:

$$(x\,,y\,,z) = (-1\,,-2\,,2)$$

c) Como r y s son secantes, hay un plano que contiene a ambas: está determinado por un punto cualquiera de ellas, como es el $P_s = (1\,,0\,,0)$ y por sus vectores directores $\vec{v}_r = (1\,,-1\,,0)$ y $\vec{v}_s = (1\,,1\,,-1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} x+y+2z-1 = 0$$

EJERCICIO 3:

a) Primero calcularemos el punto proyección Q de $P = (-1\,,1\,,0)$ sobre r.

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r : \left\{\begin{array}{r} x-y = 1 \\ z = 2 \end{array}\right. \xrightarrow{y=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right. \rightarrow Q = (1+\lambda\,,\lambda\,,2)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (\lambda+2\,,\lambda-1\,,2)\cdot(1\,,1\,,0) = 0 \;\rightarrow\; 2\lambda+1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}$$

Tenemos así que $Q = \left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,2\right)$.

El punto Q es el punto medio del segmento que une P con su su simétrico P'. Así:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q-P \;\rightarrow\; P' = (2\,,-2\,,4)$$

b) Llamemos A a ese punto. Como está en la recta r será, igual que antes:

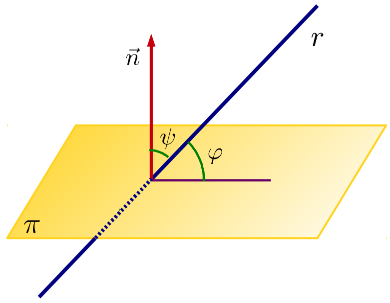
$$A = (1 + \lambda\,, \lambda\,, 2)$$

$$|\overrightarrow{PA}| = 3 \;\rightarrow\; \sqrt{(\lambda+2) + (\lambda+1)^2 + 2^2} = 3 \;\rightarrow\; 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} \lambda = \;\;\,0 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$$

Hay dos soluciones:

$$A_1 = (1\,, 0\,, 2)\;\;,\;\; A_2 = (0\,, -1\,, 2)$$

c) Para hallar el ángulo que forman la recta con el plano calcularemos primero el que forman el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1\,, 1\,, 0)$ con el vector normal del plano $\vec{n} = (1\,, 1\,, 1)$:



$$\cos\psi = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r||\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}} = 35°15'52''$$

Luego el ángulo formado entre r y π:

$$\varphi = 90° - 35°15'52'' = 54°44'8''$$