***Nombre***:______________________________________________________________ ***Curso***:_____

*Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 21/04/2014*

EJERCICIO 1: [2,5]

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ -x & + & y & = & 4 \\ 5x & + & 4y & = & k \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Razona para qué valores de $k$ es incompatible.

b) [1] Resuelva el sistema cuando sea compatible.

EJERCICIO 2: [1,5]

Sea $A$ la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & 1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & -1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & 2 \end{array}\right.$$

Resuelve el sistema sabiendo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3: [3,5]

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & my & + & z & = & 0 \\ x & + & (1+m)y & + & mz & = & 1+m \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Estudie su comportamiento según los valores del parámetro $m$.

b) [1] Resuélvalo para $m = 0$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.

Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que uno de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

EJERCICIO 1:

Calculamos el determinante de la matriz de la matriz ampliada:

$$\det(A) = 3k - 21 = 0 \xrightarrow{|A|=0} 3k - 21 = 0 \rightarrow k = 7$$

<u>Caso 1</u>: $k \neq 7$.

Como $\det(A) \neq 0$ y la matriz de coeficientes no tiene más de dos columnas:

$$\text{rg}(C) \neq \text{rg}(A) = 3$$

$S$ es incompatible.

<u>Caso 2</u>: $k = 7$.

$$A = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3 = |A| = 0$$

Así

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2$$

$S$ es compatible determinado.

Del estudio anterior se deduce además que $S$ equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal):

$$S \equiv \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + \ \ y = 4 \end{cases}$$

Es fácil resolverlo por reducción, pues al sumar reducimos la $x$, obteniendo $y = 3$. Sustituyendo, obtenemos:

$$(x\,, y) = (-1\,, 3)$$

EJERCICIO 2:

Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = m^2 - m \xrightarrow{|C|=0} m^2 - m = 0 \to m = 0\,, m = 1$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Del estudio anterior se deduce además que $S$ equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con $y$ y $z$ como incógnitas principales (columnas del menor principal) y $x$ como incógnita libre o parámetro :

$$S \equiv \begin{cases} y + z = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}$$

Poniendo $x = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = (\lambda\,, 1 - \lambda\,, 0)$$

EJERCICIO 4:

Sean

$x$ el precio en € del litro de leche

$y$ el precio en € del kilo de jamón

$z$ el precio en € del litro de aceite

El cliente pagó en total 156 euros:

$$24x + 6y + 12z = 156 \text{ [*]}$$

1 litro de aceite cuesta el triple que uno de leche:

$$z = 3x \text{ [**]}$$

1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche:

$$y = 4x + 4z \text{ [***]}$$

Resolvamos ahora el sistema formado por las ecuaciones [*] , [**] y [***].

Sustituyendo $z = 3x$ en la última ecuación obtenemos:

$$y = 16x$$

Sustituyendo ahora $y = 16x$ y $z = 3x$ en la primera:

$$24x + 96x + 36x = 156 \ \rightarrow \ x = 1$$

Tenemos así que $y = 16$ y $z = 3$.

Luego un litro de leche cuesta 1 €, un kilo de jamón 16 € y 1 litro de aceite 3 €.