Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 04/04/2014	

EJERCICIO 1: [1,5]

Consideremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & 4 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

a) [0,5] Compruebe que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) [1] Exprese y resuelva, matricialmente, el sistema.

EJERCICIO 2: [2,5]

Discuta el siguiente sistema según los valores del parámetro b:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & - & 4y & + & 6z & = & b \end{array}\right\}$$

Resuélvalo cuando sea compatible.

EJERCICIO 3: [3,5]

Discuta el siguiente sistema según los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \\ ax & + & y & + & z & = & 3a \end{array}\right\}$$

Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4: [2,5]

Un autobús transporta 90 viajeros con tres tarifas diferentes:

- ✔ 1ª: Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0,70 €.
- ✔ 2ª: Estudiantes, con descuento del 50%.
- ✔ 3ª: jubilados, con descuento del 80%.

Se sabe que el número de estudiantes es diez veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46,76 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones necesario para determinar el número de viajeros, de cada tarifa, que va en el autobús.

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto de ambas matrices:

$$C \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

Como nos sale la matriz identidad, entonces es

$$M = C^{-1}$$

b) Expresemos el sistema matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \rightarrow X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 41 \\ -27 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 6 & b \end{array} \right)$$

Vemos primero que hay un menor de orden uno de cero:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la segunda fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 6$$

Caso 1: $b \neq 6$.

Es S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Caso 2: $b = 6$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 1 < 2 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetro.

Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado por sólo la primera ecuación (fila del menor principal), con x como incógnitas principal (columna del menor) e y y z como incógnitas libres o parámetros:

$$S \equiv \{x = 3 + 2y - 3z$$

Poniendo $y = \lambda$ y $z = \mu$:

$$(x\,, y\,, z) = (3 + 2\lambda - 3\mu\,, \lambda\,, \mu)$$

EJERCICIO 3:

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = 1 - a^2 \xrightarrow{|C|=0} 1 - a^2 = 0 \to a = \pm 1$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \text{ , } \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \text{ , } \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro :

$$S \equiv \begin{cases} x + y = 1 + z \\ -x + y = -3 - z \end{cases}$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x \,, y \,, z) = (2 + \lambda \,, -1 \,, \lambda)$$

EJERCICIO 4:

Sean

x el número de personas que pagan 0.70 €

y el número de personas que pagan 0.35 €

z el número de personas que pagan 0.14 €

Número de estudiantes es 10 veces número de jubilados:

$$y = 10z$$

Recaudación total es 46.76 €:

$$0.70x + 0.35y + 0.14z = 46.76$$

Total viajeros es 90:

$$x + y + z = 90$$

Sustituyendo $y = 10z$ en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 0.70x & + & 3.64z & = & 46.76 \\ x & + & 11z & = & 90 \end{array}\right\}$$

Multiplicando por 0.70 la segunda ecuación y reduciendo obtenemos $z = 4$. Sustituyendo en la segunda $x = 40$ y es claro que $y = 40$.

Luego viajan 46 pasajeros sin descuento, 40 estudiantes y 4 jubilados.