Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 25/03/2014	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a y b para que se verifique $CD - A = \mathrm{I}$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + 2\,\mathrm{I} = A^t$.

c) [0,75] Halla una matriz Y tal que $B \cdot B^t + 2Y = D^t \cdot D$.

d) [0,5] Calcule A^{2014}.

EJERCICIO 2: [1]

Sabemos que la matriz A tiene 3 filas, que es $C \in \mathfrak{M}_{4\times 5}$ y que existe la matriz $D = (A - B) \cdot C$. ¿Cuáles son las dimensiones de todas esas matrices?

EJERCICIO 3: [2]

Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro λ no es invertible.

b) [1,25] Calcule E^{-1} para $\lambda = 2$.

EJERCICIO 4: [2]

Sabiendo que $|F| = 2$ con

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

calcula razonadamente los siguientes determinantes:

a) [0,75] $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ b) [0,75] $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$ c) [0,5] $\Delta_3 = \det\left(F^{-1}\right)$

EJERCICIO 5: [1,5]

Determina el rango de la siguiente matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & a \\ -a & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos las operaciones e igualamos el resultado a la matriz identidad:

$$C \cdot D - A = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & -a+1 \\ -2b & b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 2a-1 & = & 1 & \to & a=1 \\ -a+1 & = & 0 & \to & a=1 \\ -2b & = & 0 & \to & b=0 \\ b+1 & = & 1 & \to & b=0 \end{array} \right| \to a=1 \ , \ b=0$$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$A \cdot X + 2\mathrm{I} = A^t \to A \cdot X = A^t - 2\mathrm{I} \to X = A^{-1} \cdot \left(A^t - 2\mathrm{I}\right)$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = -1 - 0 = -1 \quad \to \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$A^t - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = A^{-1} \cdot \left(A^t - 2\mathrm{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita:

$$B \cdot B^t + 2Y = D^t \cdot D \to 2Y = D^t \cdot D - B \cdot B^t \to Y = \frac{1}{2} \cdot \left(D^t \cdot D - B \cdot B^t\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

d) Calculando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} \to A^3 = A^2 \cdot A = A \to A^4 = A^3 \cdot A = \mathrm{I} \to \cdots$$

Por inducción llegamos a que

$$\left. \begin{array}{ll} A^n = A & \text{si } n \text{ es impar} \\ A^n = \mathrm{I} & \text{si } n \text{ es par} \end{array} \right\} \to A^{2014} = \mathrm{I}$$

EJERCICIO 2:

La matriz B debe tener las mismas filas que A, así que B tiene 3 filas. A y B tienen las mismas columnas que filas tiene C, así que A y B tienen 4 columnas. D tiene las mismas filas que $A - B$ y las mismas columnas que C, así que tiene 3 filas y 5 columnas. Resumiendo:

$$A \in \mathfrak{M}_{3\times 4}\,,\ B \in \mathfrak{M}_{3\times 4}\,,\ C \in \mathfrak{M}_{4\times 5}\,,\ D \in \mathfrak{M}_{3\times 5}$$

EJERCICIO 3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(E) = -\lambda^2 + 4\lambda - 3 \ \rightarrow\ -\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \frac{-4 \pm 2}{-2} \begin{matrix} \nearrow & \lambda = 1 \\ \searrow & \lambda = 3 \end{matrix}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lcccl} \text{Si } \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = 3 & \rightarrow & \det(E) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } E^{-1} \\ \text{Si } \lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq 3 & \rightarrow & \det(E) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } E^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $\lambda = 2$ es E invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(E) = -2^2 + 8 - 3 = 1 \\ \\ \mathrm{Adj}(E) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

a) Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número":

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

b) Descomponemos el determinante en suma de dos:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En la última igualdad aplicamos que " si permutamos dos columnas el determinante cambia de signo" y "si una línea es proporcional a otra el determinante es cero".

c) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$F \cdot F^{-1} = \mathrm{I} \overset{*}{\rightarrow} |F| \cdot |F^{-1}| = 1 \rightarrow |F^{-1}| = \frac{1}{2}$$

(*) "El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores".

EJERCICIO 5:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & a \\ -a & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3a - 3 \;\to\; -3a - 3 = 0 \;\to\; a = -1$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a + 3 \;\to\; -a^2 - 2a + 3 = 0 \;\to\; a = -1\,, a = 3$$

Caso 1: $a = -1$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2)

Concluimos que el rango es 2.

Caso 2: $a \neq -1$.

El primer orlado es no nulo. Por ello el rango es 3.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lcllcl} a \neq -1 & \to & \Delta_3^1 \neq 0 & & \to & \mathrm{rg}(G) = 3 \\ a = -1 & \to & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & & \to & \mathrm{rg}(G) = 2 \end{array}$$