Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 20/03/2014

EJERCICIO 1:

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2b \end{pmatrix}$$

a) [1] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - A^2 = I_2$

c) [1] Halla una matriz Y tal que $A^3 + 3Y = B \cdot B^t$.

d) [0,5] Calcule A^{2014}.

e) [0,5] Razone si existe alguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2:

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m existe D^{-1}.

b) [1,25] Calcule D^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 3:

Sea E una matriz cuadrada de orden 3, cuyas respectivas columnas son c_1 , c_2 , c_3, tal que su determinante es $\det(E) = 5$.

Calcula:

a) [0,5] El determinante de $3E^t$.

b) [0,5] El determinante de E^{-1}.

c) [0,5] El determinante cuyas columnas son

$$3c_2 - 2c_3 \ , \ 4c_3 \ , \ c_1$$

d) [0,5] El rango de $E \cdot E^t$.

EJERCICIO 4: [1,5]

Determina el rango de la siguiente matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -3 \\ -1 & a & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & 4b-4 \\ a-1 & -2b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} -a+2 & = & 1 & \rightarrow & a=1 \\ a-1 & = & 0 & \rightarrow & a=1 \\ 4b-4 & = & 2 & \rightarrow & b=1.5 \\ -2b+3 & = & 1 & \rightarrow & b=1 \end{array} \right| \rightarrow \text{No hay solución}$$

Para ningún valor de a y b se verifica $B \cdot C^t = A$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$A \cdot X - A^2 = I_2 \ \rightarrow \ A \cdot X = I_2 + A^2 \ \rightarrow \ X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + A^2\right)$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 1 - 0 = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{Adj}(A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$I_2 + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + A^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita: Halla una matriz Y tal que $A^3 + 3Y = B \cdot B^t$.

$$A^3 + 3Y = B \cdot B^t \ \rightarrow \ 3Y = B \cdot B^t - A^3 \ \rightarrow \ Y = \frac{1}{3} \cdot \left(B \cdot B^t - A^3\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Por inducción llegamos a que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n=2014} A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 4028 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Queremos encontrar una matriz M tal que $BM = MB$.

Si existe BM, el número de filas de M debe coincidir con el de columnas de B: M debe tener 3 filas.

Si existe MB, el nº de columnas de M debe coincidir con el de filas de B: M debe tener 2 columnas.

Tendríamos así que BM es 2×2 y que MB es 3×3. Pero entonces $BM \neq MB$.

Concluimos así que no existe ninguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -m^2 + m + 6 \ \rightarrow\ -m^2 + m + 6 = 0 \ \rightarrow\ m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \ m = -2 \\ \searrow \ m = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } \ m = -2 \text{ ó } m = 3 \quad \rightarrow \quad \det(D) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{No existe } D^{-1}$$

$$\text{Si } \ m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 \quad \rightarrow \quad \det(D) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Sí existe } D^{-1}$$

b) Según lo anterior, para $m = 2$ es A invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(D) = -2^2 + 2 + 6 = 4 \\ \\ \mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow\ D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) $|3E^t| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot |E^t| = 27 \cdot |E| = 135$

Aplicamos que “el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta” y “si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número”

b) El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$E \cdot E^{-1} = \mathrm{I} \rightarrow |E| \cdot |E^{-1}| = 1 \rightarrow |E^{-1}| = \frac{1}{5}$$

Hemos aplicado ahí que “el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores”.

c) Escribamos los determinantes por columnas:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det[\ 3c_2 - 2c_3 \quad 4c_3 \quad c_1\ ] \\ &= \det[\ 3c_2 \quad 4c_3 \quad c_1\ ] - \det[\ 2c_3 \quad 4c_3 \quad c_1\ ] \\ &= 3 \cdot 4 \det[\ c_2 \quad c_3 \quad c_1\ ] - 0 \\ &= -12 \det[\ c_1 \quad c_3 \quad c_2\ ] \\ &= 12 \det[\ c_1 \quad c_2 \quad c_3\ ] \\ &= 12 \cdot 5 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Hemos aplicado aquí la propiedad que permite expresar un determinante como suma de dos y que al permutar dos columnas el determinante cambia de signo.

d) El determinante de esa matriz cuadrada de orden 3 es

$$\det\left(E \cdot E^t\right) = \det\left(E\right) \cdot \det\left(E^t\right) = 5 \cdot 5 = 25 \neq 0$$

De donde resulta que su rango es 3.

EJERCICIO 4:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -3 \\ -1 & a & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} = -4a \quad , \quad \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & a & 4 \end{vmatrix} = 5a$$

Caso 1: $a = 0$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2)

Concluimos que el rango es 2.

Caso 2: $a \neq 0$.

Cualquiera de los orlados, de orden 3, es no nulo. Por ello el rango es 3.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lllll} a \neq 0 & \rightarrow & \Delta_3^1 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 3 \\ a = 0 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0 \,, \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 2 \end{array}$$