Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 07/02/2014

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,,+\infty) \;\rightarrow\; \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(x) - 1$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = \mathrm{e}^2$.

EJERCICIO 2: [3]

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x|x-2|$$

a) [1] Comprueba que para $x = 0$ la recta tangente a su gráfica es $y = 2x$.

b) [1] Dibuja el recinto delimitado por la gráfica de f y esa recta tangente.

c) [1] Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3:

a) [1] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función f definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-2}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1] Calcula

$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

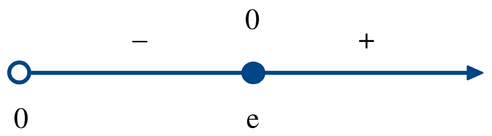
Determina el valor positivo de a para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = ax$ es $\dfrac{9}{2}$.

EJERCICIO 1:

Vamos a estudiar el signo de la función. Primero veamos los ceros:

$$\ln x - 1 = 0 \to \ln x = 1 \to x = \mathrm{e}$$

Y así, los intervalos de signo:



Así que el área del recinto indicado viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = -\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas anteriores:

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - 2x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = -\mathrm{e} + 2$$

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - 2x\Big]_{x=\mathrm{e}}^{x=\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}$$

Luego

$$a(\mathfrak{R}) = \mathrm{e} - 2 + \mathrm{e} = 2\,\mathrm{e} - 2 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 2:

Primero expresamos la función por partes. Veamos los ceros del interior del valor absoluto:

$$x - 2 = 0 \to x = 2$$

Y ahora distinguimos:

$$x < 2 \ \to\ |x-2| = 2 - x \ \to\ x|x-2| = x\,(2-x) = 2x - x^2$$
$$x \geq 2 \ \to\ |x-2| = x - 2 \ \to\ x|x-2| = x\,(x-2) = x^2 - 2x$$

Resumiendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) La tangente para $x = 0$ es

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0)$$

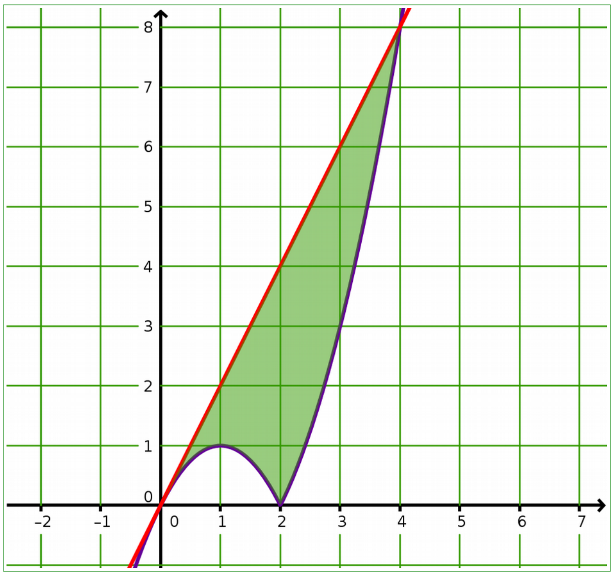
Como para $x < 2$ es $f'(x) = 2 - x$, sustituyendo:

$$y - 0 = 2\cdot(x - 0)$$

Y simplificando

$$y = 2x$$

b) La gráfica de f se compone de dos trozos de parábola y con unas tablitas de valores adecuadas:



c) Vemos que la tangente corta a la curva para $x = 0$ (punto de tangencia) y para $x = 4$. Así, el área del recinto viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_0^2 \big(2x - (2x - x^2)\big)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \big(2x - (x^2 - 2x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathfrak{R}) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{x=4} = \frac{8}{3} + 32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}$$

Operando:

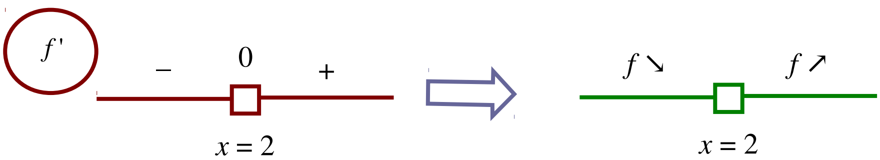
$$a(\mathfrak{R}) = 8 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Observemos que el integrando es una función continua: es una fracción racional en la que el denominador es siempre positivo. Así aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo, que nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

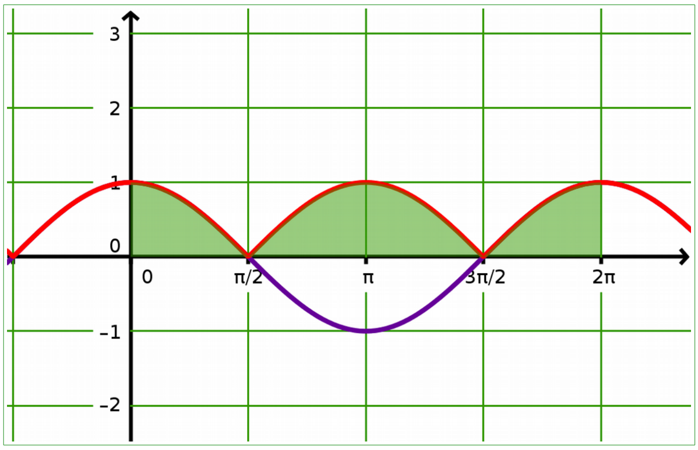
$$f'(x) = \frac{x-2}{\mathrm{e}^x + 1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = 2$ hay un mínimo absoluto.

b) Recordemos la función coseno en el intervalo de integración y, a partir de ella, dibujemos su valor absoluto:



Tenemos:

$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x =$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

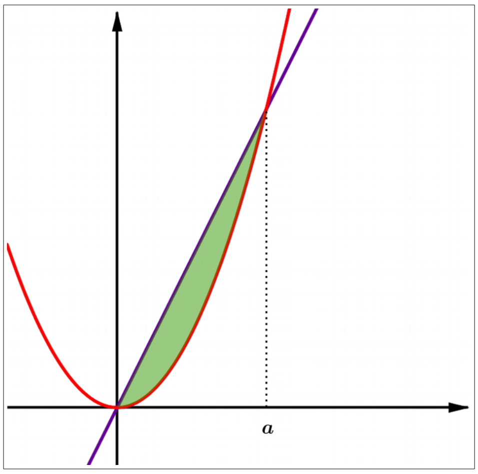
$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{x=\pi/2}^{x=3\pi/2} + \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{x=3\pi/2}^{x=2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

EJERCICIO 4:

Es fácil comprobar dónde se cortan la parábola y la recta:

$$x^2 = ax \;\rightarrow\; x^2 - ax = 0 \;\rightarrow\; x(x-a) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,, x = a$$

La gráfica será como se muestra a continuación:



El área del recinto comprendido entre ambas es:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_0^a \left(ax - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$$

Aplicando Barrow:

$$\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2}$$

Despejando:

$$a^3 = 27 \;\rightarrow\; a = \sqrt[3]{27}$$

Concluimos que es

$$a = 3$$