Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 11/02/2014

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x\cos(x)$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Halla el área de la región delimitada por la parábola $y = x\,(3 - x)$ y la cuerda de extremos $A\,(-1\,, -4)$ y $B\,(2\,, 2)$.

EJERCICIO 3:

a) [1] Obtén la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ a la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+3}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

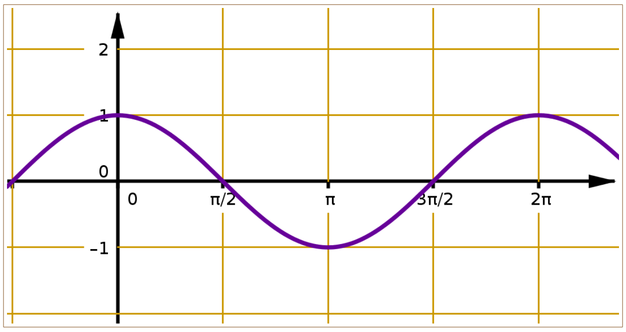
$$\int_{-2}^{0} x|x+1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Determina el valor positivo de a para el que el área del recinto limitado por la curva $y = x^3$ y la recta $y = ax$ es 8.

EJERCICIO 1:

Vamos a estudiar el signo de la función. Para ello, recordemos la gráfica de la función coseno:



En el intervalo de integración f tiene el mismo signo que el coseno: es negativa en el intervalo $\left[\pi\,,\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ y positiva en $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,,\,2\pi\right]$.

Así que el área del recinto indicado viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hallemos la primitiva siguiente por partes:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$$

Aplicando ahora la Regla de Barrow a las dos integrales definidas anteriores:

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x\Big]_{x=\pi}^{x=\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{2} + 1$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x\Big]_{x=\frac{3\pi}{2}}^{x=2\pi} = \frac{3\pi}{2} + 1$$

Luego

$$a(\mathfrak{R}) = \frac{3\pi}{2} - 1 + \frac{3\pi}{2} + 1 = 3\pi \quad \text{u.a.}$$

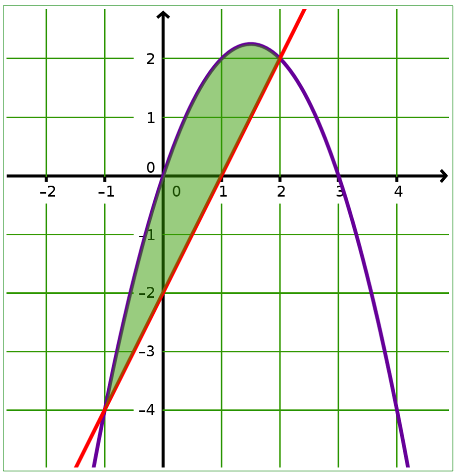
EJERCICIO 2:

Primero vamos a obtener la ecuación de la recta que pasa por $A\,(-1\,,-4)$ y $B\,(2\,,2)$. Como su pendiente es

$$\overrightarrow{AB} = (3\,,6) \to m_{AB} = \frac{6}{3} = 2$$

resulta:

$$y - 2 = 3\,(x-2) \;\to\; y = 2x - 2$$



A la derecha se ha dibujado el recinto. Tenemos:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_{-1}^{2} \big(3x - x^2 - (2x-2)\big)\,\mathrm{d}x$$

Ahora, simplificamos y aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=2}$$

Operando obtenemos

$$a(\mathfrak{R}) = \frac{9}{2} = 4.5 \quad \text{u.a.}$$

EJERCICIO 3:

a) Observemos que el integrando es continuo: es una fracción racional con denominador siempre positivo. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{x+3}{x^4+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

La recta tangente tiene de ecuación:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$$

Calculando:

$$f(1) = \int_1^1 \frac{t+3}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = 0 \quad , \quad f'(1) = \frac{1+3}{1+1} = 2$$

Resulta:

$$y - 0 = 2 \cdot (x-1) \;\rightarrow\; y = 2x - 2$$

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Resulta así:

$$x < -1 \;\rightarrow\; |x+1| = -x-1 \;\rightarrow\; x|x+1| = x\,(-x-1) = -x^2 - x$$

$$x \geq -1 \;\rightarrow\; |x+1| = x+1 \;\rightarrow\; x|x+1| = x\,(x+1) = x^2 + x$$

Así que separamos la integral en dos:

$$\int_{-2}^{0} x|x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (-x^2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

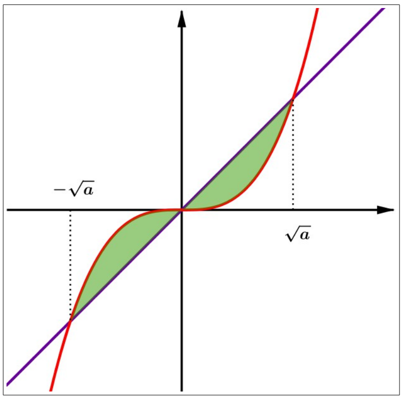
$$\int_{-2}^{0} x|x+1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = -1$$

EJERCICIO 4:

Es fácil comprobar dónde se cortan la curva y la recta:

$$x^3 = ax \;\rightarrow\; x^3 - ax = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - a) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,, x = \pm\sqrt{a}$$

La gráfica de $y = x^3$ es muy fácil dibujarla y la recta $y = ax$ es una recta creciente que pasa por el origen de coordenadas. Así que un esbozo de la gráfica de ambas será como se muestra a continuación:



Observemos que por simetría podemos considerar sólo la parte del recinto correspondiente al intervalo $\left[0\,,\sqrt{a}\right]$:

$$4 = \int_0^{\sqrt{a}} \left(ax - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{a}} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Luego:

$$4 = \frac{a^2}{4} \;\rightarrow\; a^2 = 16 \;\rightarrow\; a = 4$$

Obtenemos así que es $a = 4$.