Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Integral definida	

EJERCICIO 1: [2,5]

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-2)\,\mathrm{e}^{x}$.

a) Determina los intervalos en los que la función f es creciente

b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=3$..

c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 2: [3]

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x=0$ y $x=\pi$.

EJERCICIO 3:

a) [1] Halla la tangente para $x=2$ a la gráfica de la función f definida por

$$f(x)=3+\int_2^x \frac{10t+5}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

b) [1] Calcula

$$\int_0^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula $\beta>0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=-x^2+2\beta^2$$

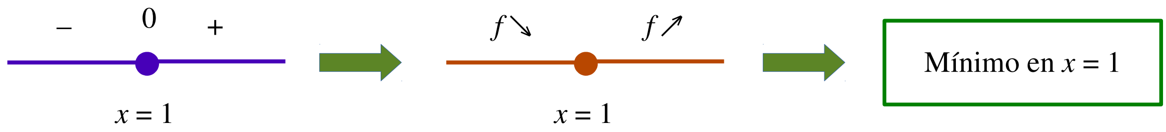
sea 72 (unidades de área).

EJERCICIO 1:

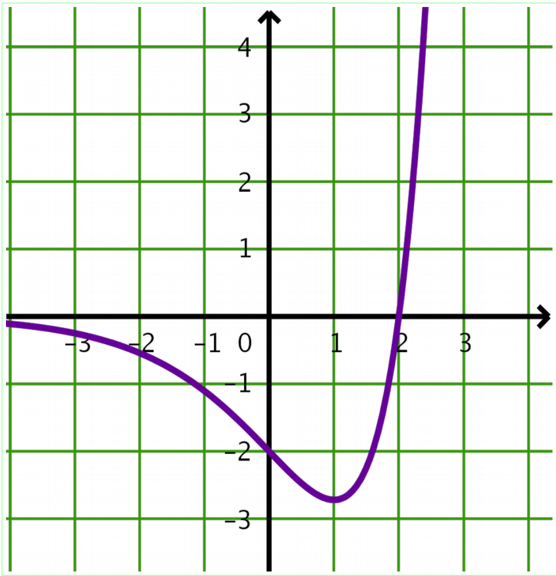
a) Derivemos la función:

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = e^x \cdot (x-1)$$

Sólo es cero para $x = 1$. Veamos el estudio de signo de la derivada y qué obtenemos:



b) Usando lo anterior y una simple tabla de valores:



c) Ante todo, obtengamos su primitiva (por partes, tomando la exponencial como parte a integrar y el polinomio como parte a derivar):

$$\begin{aligned}\int (x-2)\,e^x dx &= (x-2)\,e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= (x-2)\,e^x - \int e^x dx \\ &= (x-2)\,e^x - e^x + C \\ &= (x-3)\,e^x + C\end{aligned}$$

Al cambiar de signo la función en el interior del intervalo de integración, para calcular el área calculamos separadamente:

$$\int_1^2 (x-2)\,e^x dx = \Big[(x-3)\,e^x\Big]_{x=1}^{x=2} = -e^2 + 2e < 0$$

$$\int_2^3 (x-2)\,e^x dx = \Big[(x-3)\,e^x\Big]_{x=2}^{x=3} = 0 + e^2 > 0$$

Así que el área del recinto indicado viene dada por:

$$\mathscr{A} = e^2 - 2e + e^2 = 2e\,(e-1) \ \ u^2$$

EJERCICIO 2:

Vamos a obtener las ecuaciones de las dos rectas tangentes. En primer lugar:

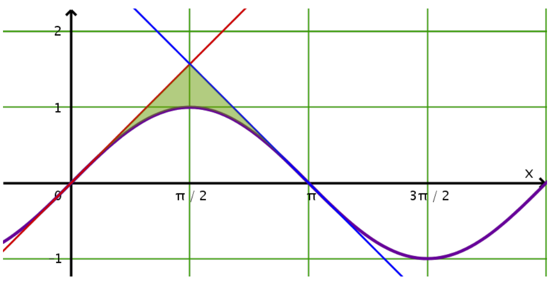
$$f(x) = \operatorname{sen} x \xrightarrow{D} f'(x) = \cos x$$

Las tangentes para $x = 0$ y para $x = \pi$ son:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x-0) \to y - 0 = 1 \cdot (x-0) \to y = x$$

$$y - f(\pi) = f'(\pi) \cdot (x+\pi) \to y - 0 = -1 \cdot (x+\pi) \to y = -x + \pi$$

Un esbozo del recinto:



Se trata de la unión del recinto de $x = 0$ a $x = \pi/2$ comprendido entre la primera tangente y la curva junto con el recinto de $x = \pi/2$ a $x = \pi$ comprendido entre la segunda tangente y la curva:

$$\mathscr{A} = \int_0^{\pi/2} (x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\mathscr{A} = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi\,x + \cos x\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) + \left(\frac{\pi^2}{2} - 1 + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

(unidades de área).

Observemos que el recinto es simétrico respecto de $x = \dfrac{\pi}{2}$. Así que hubiese bastado calcular la primera integral y multiplicarla por dos.

EJERCICIO 3:

a) Observemos que el integrando es una función continua: es una fracción racional en la que el denominador es siempre positivo. Así aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo, que nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$f'(x) = \frac{10x + 5}{(x^2 + 1)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Tenemos así que $f(2) = 3 + 0 = 3$ (la integral desde 2 hasta 2 es cero). Y $f'(2) = \dfrac{25}{25} = 1$, luego la recta tangente para $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y - 3 = 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = x + 1$$

b) Primero expresamos como una función a trozos. Veamos los ceros del interior del valor absoluto:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Es fácil observar que entre los dos ceros el interior del valor absoluto es negativo (cambiaremos el signo para volver positivo) y que fuera del intervalo es positivo (dejaremos todo sin tocar), así que:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 < x < +1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq +1 \end{cases}$$

Tenemos:

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-x^2 + 1\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

EJERCICIO 4:

Es fácil averiguar dónde se cortan las parábolas. Se igualan las ecuaciones:

$$x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \;\to\; 2x^2 = 2\beta^2 \;\to\; x^2 = \beta^2 \;\to\; x = \pm\beta$$

Cuando se dibujan una parábola cóncava (g) y una convexa (f), la cóncava va por encima entre los puntos de corte. Así que el área del recinto comprendido entre ambas es:

$$A = \int_{-\beta}^{\beta} (g - f) = \int_{-\beta}^{\beta} \left(2\beta^2 - 2x^2\right) \mathrm{d}x$$

Aplicando Barrow:

$$\left[2\beta^2 x - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=-\beta}^{x=\beta} = \frac{8\beta^3}{3} - \frac{4\beta^3}{3} = \frac{4\beta^3}{3}$$

Igualando y resolviendo:

$$\frac{4\beta^3}{3} = 36 \;\to\; \beta^3 = 27 \;\to\; \beta = \sqrt[3]{27}$$

Concluimos que es

$$\beta = 3$$

Nota: podríamos haber integrado entre $x = 0$ y $x = \beta$ y luego multiplicado por dos, debido a la simetría del recinto respecto del eje Y.