Nombre:______________________________ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 13/01/2014	

EJERCICIO 1:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x\tan(x^2)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 2:

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\ln\left(1+x^2\right)$$

Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I=\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $t=\sqrt[3]{x-1}$

EJERCICIO 4:

Calcula

$$\int \frac{5}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$

mediante un cambio de variable adecuado que la convierta en la integral de una función racional.

EJERCICIO 5:

Halla la expresión de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}+1 & \text{si} \quad x\le 0\\ \operatorname{sen}(3x)+2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

y cuya gráfica corta al eje de ordenadas para $y=\dfrac{3}{2}$.

EJERCICIO 1:

a) Es una integral compuesta de tipo seno/coseno con $u = \mathrm{e}^{-x}$:

$$\int \mathrm{e}^{-x} \cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = -\int \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = -\operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = \ln x$:

$$\int \frac{2}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} \mathrm{d}x = 2\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \mathrm{d}x = 2\operatorname{arcsen}(\ln x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos(x^2)$:

$$\int x \tan(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\cos(x^2)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = \ln x$:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \mathrm{d}x = \int (\operatorname{sen} x)^{-3} \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{(\operatorname{sen} x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C$$

EJERCICIO 2:

Integramos en primer lugar usando la integración por partes, donde 1 es la parte a integrar y $\ln(1+x^2)$ la parte a derivar:

$$\int 1 \cdot \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

Observemos que la integral que queda ahí por hacer es racional, pero tendremos que efectuar la división:

$$\left(2x^2\right) : \left(x^2+1\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 2 \\ r = -2 \end{cases}$$

Ahora, tenemos:

$$\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \left(2 + \frac{-2}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + C$$

Llamando G a la primitiva buscada:

$$G(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 - 0 + 0 + C = 0 \rightarrow C = 0$$

Queda

$$G(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$t = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow t^3 = x - 1 \rightarrow x = 1 + t^3 \rightarrow \mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{t^3+1}{t} \cdot 3t^2\mathrm{d}t = \int (t^3+1) \cdot 3t\,\mathrm{d}t = \int (3t^4 + 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^2 + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt[3]{x-1}$:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + C$$

EJERCICIO 4:

Hagamos

$$t = \mathrm{e}^x \to \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

multiplicando el numerador y el denominador por e^x nos será más fácil hacer el cambio:

$$I = \int \frac{5}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{t(t+2)}\,\mathrm{d}t (*)$$

Ahora hemos de calcular esa integral de función racional. Para ello descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5}{t(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2} \; (**)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$5 = a(t+2) + bt \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } t = 0 \to 2a = 5 \to a = \dfrac{5}{2} \\[2ex] \text{si } t = -2 \to -2b = 5 \to b = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int \frac{\frac{5}{2}}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{-\frac{5}{2}}{t+12}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\ln(t) - \frac{5}{2}\ln(t+2) + C$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$\int \frac{5}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln(\mathrm{e}^x) - \frac{5}{2}\ln(\mathrm{e}^x + 2) + C = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}\ln(\mathrm{e}^x + 2) + C$$

EJERCICIO 5:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{3}\cos(3x) + 2x + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que debe ser $f(0) = \dfrac{3}{2}$:

$$f(0) = \frac{3}{2} \;\to\; \frac{1}{2} + a = \frac{3}{2} \;\to\; a = 1$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \;\to\; \frac{1}{2} + a = -\frac{1}{3} + b \;\xrightarrow{a=1}\; b = \frac{11}{6}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{3}\cos(3x) + 2x + \dfrac{11}{6} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$