Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 19/12/2013	

EJERCICIO 1:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot(2x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 2:

Sea $g : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = x\,(5 + 2\ln x)$$

Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $(1\,,0)$.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x - 1 = t^2$

EJERCICIO 4:

Calcula

$$\int \frac{3}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

mediante un cambio de variable adecuado que la convierta en la integral de una función racional.

EJERCICIO 5:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(2x) + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{3x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 1:

a) Es una integral compuesta de tipo seno/coseno con $u = \mathrm{e}^x - 1$:

$$\int \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x - 1) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 3x$:

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}(3x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \operatorname{sen}(2x)$:

$$\int \cot(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(2x)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = \ln x$:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$$

EJERCICIO 2:

Integramos en primer lugar usando la integración por partes, donde x es la parte a integrar y $5 + 2\ln x$ la parte a derivar:

$$\int x\,(5+2\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(5+2\ln x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(5+2\ln x) - \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(5+2\ln x) - \frac{x^2}{2} + C$$

Llamando G a la primitiva buscada:

$$G(1) = 0 \ \rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot 5 - \frac{1}{2} + C = 0 \rightarrow C = -2$$

Queda

$$G(x) = \frac{x^2}{2}(5+2\ln x) - \frac{x^2}{2} - 2$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x - 1 = t^2 \rightarrow x = 1 + t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(2t^2\right) : \left(t^2+1\right) \ \rightarrow\ \begin{cases} c = 2 \\ r = -2 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(2 + \frac{-2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 2t - 2\arctan(t) + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x-1}$:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}) + C$$

EJERCICIO 4:

Hagamos

$$t = \mathrm{e}^x \to \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

multiplicando el numerador y el denominador por e^x nos será más fácil hacer el cambio:

$$I = \int \frac{3}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t\,(*)$$

Ahora hemos de calcular esa integral de función racional. Para ello descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}\ (**)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$3 = a(t+1) + bt \longrightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0 \to 3 = a \to a = 3 \\ \text{si } t = -1 \to 3 = -b \to b = -3 \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$I = \int \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{-3}{t+11}\,\mathrm{d}t = 3\ln(t) - 3\ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$I = 3\ln(\mathrm{e}^x) - 3\ln(\mathrm{e}^x + 1) + C = 3x - 3\ln(\mathrm{e}^x + 1) + C$$

EJERCICIO 5:

Integrando cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \ \to\ 0 + a = 0 \ \to\ a = 0$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \ \to\ a = \frac{2}{3} + b \ \xrightarrow{a=0}\ b = -\frac{2}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$