Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas

EJERCICIO 1:

Determina a , b y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x(ax^2+bx+c)$$

tiene un punto de inflexión para $x=-1$ y que en él la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8=0$.

EJERCICIO 2:

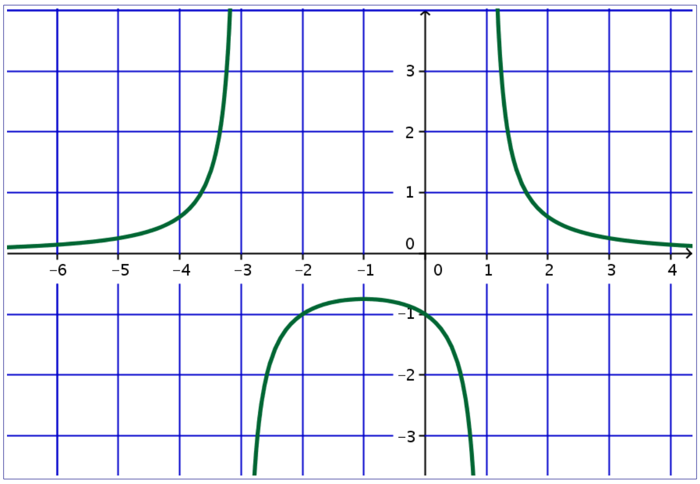
Sea $f:(0\,,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln x$.

a) [1] Prueba que la función derivada es decreciente en todo su dominio.

b) [1,5] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g:(0\,,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

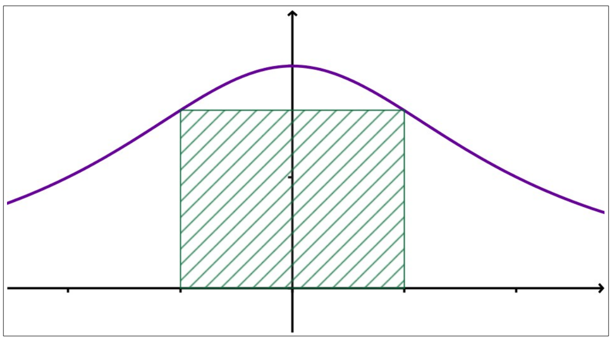
EJERCICIO 3:

Determina a , b y c para que la curva $y=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente:



EJERCICIO 4:

De entre todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, determina el perímetro del de mayor área.



Todos los ejercicios tienen igual valoración

EJERCICIO 1:

Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \ \rightarrow\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ \rightarrow\ f''(x) = 6ax + 2b$$

Para $x = -1$ hay inflexión así:

$$f''(-1) = 0 \ \rightarrow\ -6a + 2b = 0 \ \rightarrow\ -3a + b = 0 \ (1)$$

Observemos que:
La pendiente de la tangente $y = -10x - 8$ es la derivada en el punto de tangencia:

$$m = -10 \ \rightarrow\ f'(-1) = -10 \ \rightarrow\ 3a - 2b + c = -10 \ (2)$$

La recta tangente toca a la gráfica en el punto de tangencia, así:

$$\text{si } \ x = -1 \ \text{ es } \ y = -10 \cdot (-1) - 8 = 2 \ \rightarrow\ f(-1) = 2 \ \rightarrow\ -a + b - c = 2 \ (3)$$

Si sumamos (2) y (3) obtenemos $2a - b = -8$. Ahora resolviendo el sistema formado por esta ecuación junto con (1), y luego sustituyendo en (3) obtenemos:

$$a = 8 \,,\ b = 24 \,,\ c = 14$$

EJERCICIO 2:

a) Ante todo, derivemos la función:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

Para probar que es decreciente en todo su dominio, calculemos su derivada (que es la derivada segunda de f):

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \quad (x > 0)$$

Observemos que f'' es siempre negativa, pues el numerador es negativo y el denominador positivo (es un cuadrado). Luego f' es siempre decreciente.

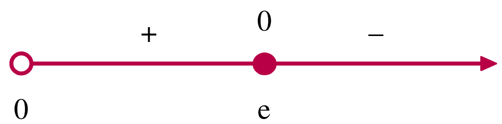
b) Vamos a estudiar la monotonía de la función g, para ello analicemos el signo de su derivada.

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} \ \xrightarrow{D}\ g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (x > 0)$$

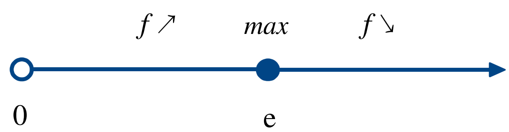
Ceros:

$$1 - \ln x = 0 \ \rightarrow\ \ln x = 1 \ \rightarrow\ x = \mathrm{e}$$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos la monotonía de la función:



En el esquema de monotonía apreciamos que la función tiene un máximo absoluto para $x = e$.

EJERCICIO 3:

Observemos en primer lugar que la curva tiene dos asíntotas verticales, que son $x = -3$ y $x = 1$.

Así, tenemos que debe ser:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \left[\frac{a}{9 - 3b + c}\right] = \pm\infty \longrightarrow 9 - 3b + c = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \left[\frac{a}{1 + b + c}\right] = \pm\infty \longrightarrow 1 + b + c = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas igualdades obtenemos

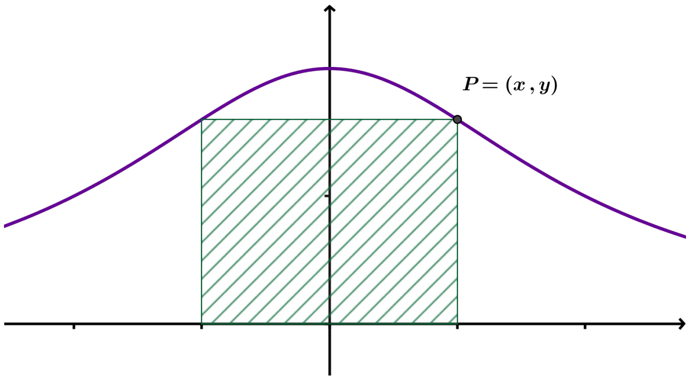
$$b = 2\ ,\ c = -3$$

En la gráfica percibimos que la gráfica pasa por el punto (0\,,-1), de donde deducimos

$$f(0) = -1 \longrightarrow \frac{a}{0^2 + 2 \cdot 0 - 3} = -1 \longrightarrow \frac{a}{-3} = -1 \longrightarrow a = 3$$

EJERCICIO 4:

Sea $P = (x\,, y)$ el vértice del rectángulo situado en la curva, con $x > 0$.



Observemos que la base del rectángulo es $2x$ y que altura es

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

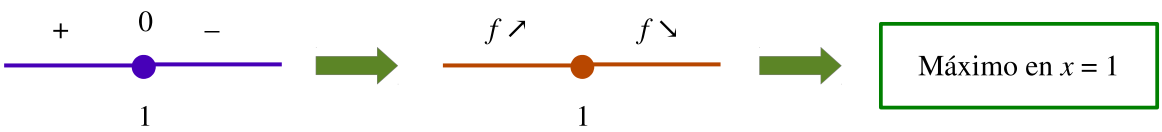
El área del rectángulo es lo que tenemos que <u>maximizar</u>:

$$f(x) = 2x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} \quad (x > 0)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{1 + x^2} = 0 \rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



Concluimos que la base del rectángulo es $2x = 2$ y la altura $y = \dfrac{1}{2}$.

Así, el perímetro del rectángulo es

$$p = 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$$