Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 25/11/2013	

EJERCICIO 1: [2,5]

Determina, si es posible, el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$$

tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$.

EJERCICIO 2:

Sea f la función definida por

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \quad (x \neq 1)$$

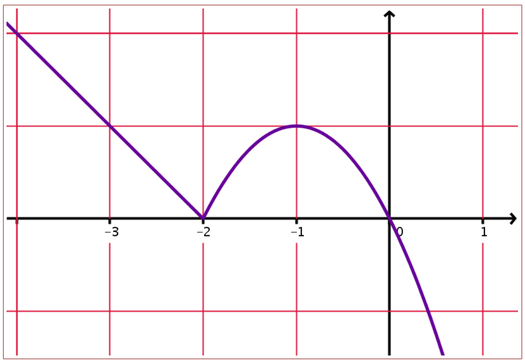
a) [0,75] Estudia la continuidad de la función.

b) [1] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f.

c) [0,75] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

EJERCICIO 3:

La gráfica de la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la que vemos a continuación.



a) [0,5] ¿Es derivable f en todos sus puntos? ¿Y dos veces derivable?

b) [0,5] Haz un esquema de monotonía de f. ¿Dónde presenta la gráfica $y = f(x)$ sus extremos?

c) [0,5] Estudia la curvatura de la curva $y = f(x)$. ¿Tiene puntos de inflexión?

d) [0,5] Sabiendo que el punto $(-3\,,3)$ está en la gráfica de f, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente en dicho punto?

EJERCICIO 4:

Considera la función $g : [1\,,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt{10 - 2x}$$

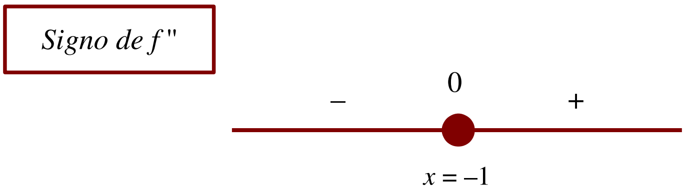
a) [2,25] Calcula el punto de la gráfica de g más cercano al punto $(2\,,0)$. ¿Qué distancia los separa?

b) [0,75] Obtén también las coordenadas del más alejado, si es que existe.

EJERCICIO 1:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 6x + c \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 6$$

Es muy sencillo estudiar el signo de la derivada segunda, que se hace cero para $x = -1$:



Concluimos que la función tiene el punto de inflexión para x=-1. Observemos que:

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia:

$$m = 3 \;\rightarrow\; f'(-1) = 3 \;\rightarrow\; 3 - 6 + c = 3 \;\rightarrow\; c = 6$$

La recta tangente toca a la gráfica en el punto de tangencia, así:

$$\text{si} \;\; x = -1 \;\; \text{es} \;\; y = 3 \cdot (-1) + 4 = 1 \;\rightarrow\; f(-1) = 1 \;\rightarrow\; -1 + 3 - c + d = 1 \;\xrightarrow{c=6}\; d = 5$$

Concluimos así que

$$c = 6\,,\; d = 5$$

EJERCICIO 2:

a) La función es continua en todo punto excepto para x=1 (cero del denominador). Veamos en este punto:

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) =$ no existe

Límites: $$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0 \\ f(1+) = e^{\frac{1}{0+}} = e^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 1$.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: por lo anterior es $x = 1$.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos el límite en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} \stackrel{*}{=} e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} \stackrel{*}{=} e^{-\infty} = 0$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de los grados en el exponente.

Concluimos que hay una asíntota horizontal:

$$y = 0 \text{ para } x \rightarrow -\infty$$

<u>Asíntota oblícua</u>: podría haber para ($x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \stackrel{a}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{b}{=} [+\infty \cdot 1] = +\infty$$

Donde en $[a]$ Regla de L'Hôpital y en $[b]$ la Regla de los grados.

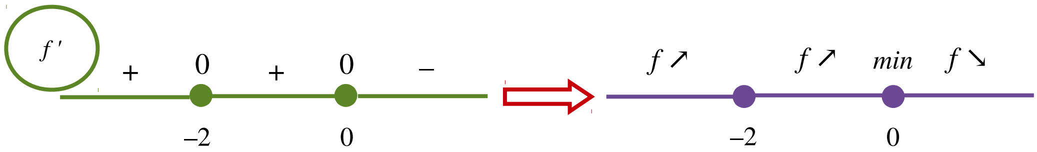
Concluimos que no hay asíntotas oblicuas.

EJERCICIO 3:

a) En la gráfica percibimos que hay derivada en todo punto, esto es, para todo número real.

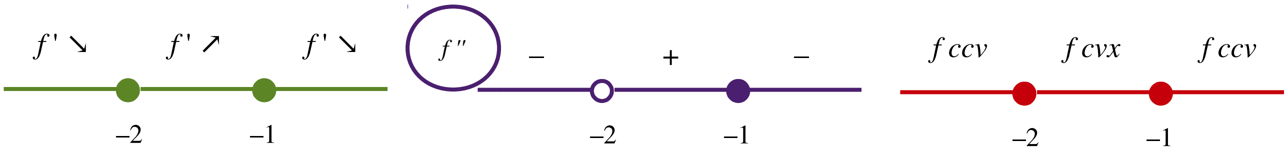
La función $f'(x)$ parece derivable en todo punto excepto para $x = -2$, donde apreciamos claramente un punto anguloso. Así, es $y = f(x)$ dos veces derivable en todo punto excepto para $x = -2$.

b) Usando la gráfica podemos determinar directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Observemos que para $x = 0$ la función f tiene un máximo relativo (que es absoluto) y que para $x = -2$ la recta tangente es horizontal y atraviesa a la curva, pero no es un extremo.

c) Ahora, de la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta puntos de inflexión para $x = -2$ y para $x = -1$.

d) En la gráfica de la derivada vemos que la derivada para $x = -3$ es $y' = 1$. Así, la recta tangente pedida es:

$$y - f(-3) = f'(-3) \cdot (x + 3)$$

Sustituyendo y simplificando:

$$y - 3 = 1 \cdot (x + 3) \ \rightarrow \ y = x + 6$$

EJERCICIO 4:

a) Un punto cualquiera de esa gráfica será:

$$P = \left(x\,,\sqrt{10 - 2x}\right)$$

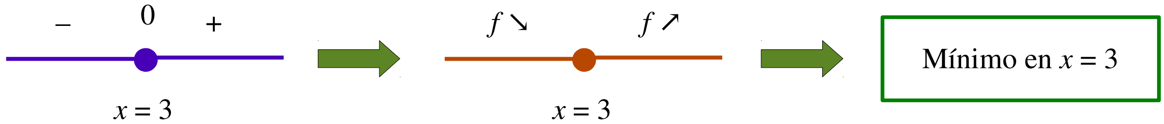
Queremos que sea mínima la distancia entre $A = (2\,,0)$ y el punto P anterior, así debemos <u>minimizar</u>:

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{10-2x})^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 14}} = 0 \rightarrow x = 3$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



El punto que nos da la distancia mínima es $P = (3\,,2)$ y la distancia mínima es $f\,(3) = \sqrt{5}$.

b) Para obtener dónde alcanza la distancia el máximo necesitamos una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	1		3		4
$d = f(x)$	3	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{6}$

La distancia máxima es $f(1) = 3$, luego el punto más alejado es

$$x = 1 \ \rightarrow y = g(1) = \sqrt{8}$$

o lo que es lo mismo:

$$P = \left(1\,,\sqrt{8}\right)$$