Nombre:________________________________ **Curso**:_____	
Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 15/11/2013	

EJERCICIO 1:

Determina los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tiene un extremo relativo en el punto $(1\,,-1)$ y una inflexión para $x = -1$.

EJERCICIO 2:

Sabemos que es derivable en todo su dominio la función $f : (-1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x+1} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

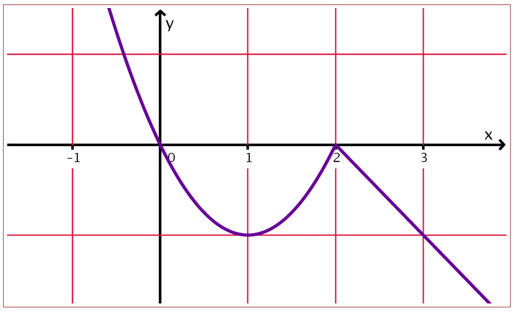
a) [1,25] Comprueba que ha de ser $a = 1$ y $b = 0$.

b) [1,5] Obtén sus extremos absolutos en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}\,,\mathrm{e}\right]$.

c) [1,25] Determina las asíntotas de la función.

EJERCICIO 3:

La gráfica de la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la que vemos a continuación.



a) [0,5] ¿Es derivable la función en todos sus puntos? ¿Y dos veces derivable?

b) [0,75] Haz un esquema de monotonía de f. ¿Dónde presenta la gráfica $y = f(x)$ sus extremos?

c) [0,75] Estudia la curvatura de la curva $y = f(x)$. ¿Tiene puntos de inflexión?

d) [0,5] Sabiendo que el punto $(3\,,2)$ está en la gráfica de f, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente en dicho punto?

EJERCICIO 4:

En un pueblo se quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas, aprovechando una tapia existente como uno de los lados y dispone de 300 metros de tela metálica para hacer los otros tres.

a) [2] ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?

b) [0,5] La comisión de fiestas estima que para montar las atracciones, pista de bailes, ... necesitan 8000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, ¿será suficientemente grande el recinto anterior?

EJERCICIO 1:

Primero, derivemos dos veces la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\to\; f''(x) = 6x + 2a$$

Para $x = 1$ hay inflexión así:

$$f''(1) = 0 \;\to\; -6 + 2a = 0 \;\to\; a = 3$$

Si en $(1\,,-1)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada es cero: $\quad f'(1) = 0 \;\to\; 3 + 6 + b = 0 \;\to\; b = -9$

La gráfica pasa por ese punto: $\quad f(1) = -1 \;\to\; 1 + 3 - 9 + c = -1 \;\to\; c = 4$

Concluimos así que

$$a = 3\,,\; b = -9\,,\; c = 4$$

EJERCICIO 2:

a) Como la función es derivable en todo su dominio, entonces es continua en todo su dominio. En particular, es continua para $x = 0$. Así, se cumple:

$$f(0-) = f(0+) \;\to\; \frac{b}{1} = \frac{\ln(1)}{1} \;\to\; b = 0$$

Como la función es derivable en todo su dominio, en particular es derivable para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{(x+1)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\[2ex] \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \;\longrightarrow\; \begin{cases} f'(0-) = \dfrac{a}{1} = a \\[2ex] f'(0+) = \dfrac{1 - \ln 1}{1} = 1 \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 0$ deben coincidir, obtenemos igualando que es $a = 1$.

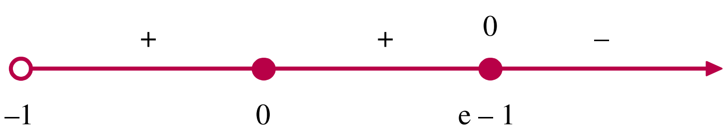
b) Vamos a estudiar la monotonía de la función, para ello estudiemos el signo de la derivada.

Ceros:

$$-1 < x < 0 \to \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \to \text{ no}$$

$$x \ge 0 \;\to\; \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \;\to\; \ln(x+1) = 1 \;\to\; x + 1 = \mathrm{e} \;\to\; x = \mathrm{e} - 1 \approx 1.72$$

Intervalos de signos de la derivada:



De ahí deducimos la monotonía de la función:

En el esquema de monotonía apreciamos que la función tiene un mínimo absoluto.

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	$-\frac{1}{2}$		$\mathrm{e}-1$		e
y	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{\ln(e+1)}{\mathrm{e}+1}$

Mínimo absoluto: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Máximo aboluto: $\left(\mathrm{e}-1, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

c) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de tipo infinito para $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{-1}{+0}\right] = -\infty$$

Concluimos que $x = -1$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

Concluimos que hay una asíntota horizontal:

$y = 0$ para $x \to +\infty$

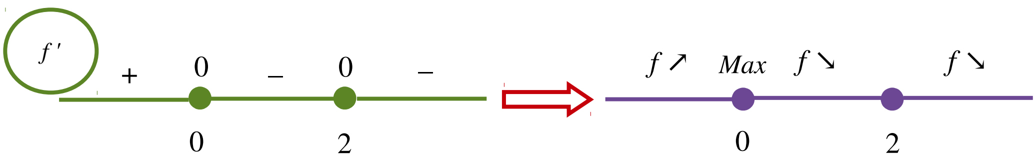
<u>Asíntota oblícua</u>: no puede existir pues hay horizontal para la única tendencia posible ($x \to +\infty$).

EJERCICIO 3:

a) En la gráfica percibimos que hay derivada en todo punto, esto es, para todo número real.

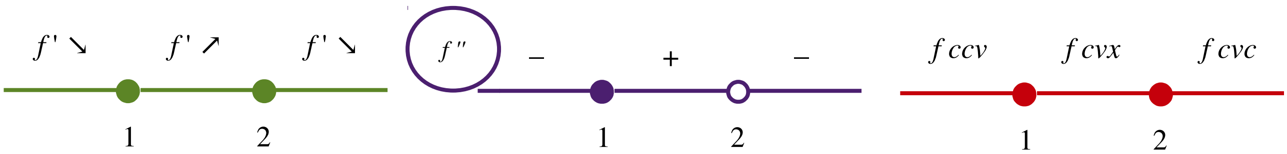
La función $f'(x)$ parece derivable en todo punto excepto para $x = 2$, donde apreciamos claramente un punto anguloso. Así, tendremos que $y = f(x)$ es derivable dos veces en todo punto excepto para $x = 2$.

b) Usando la gráfica podemos determinar directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Observemos que para $x = 0$ la función f tiene un máximo relativo (que es absoluto) y que para $x = 2$ la recta tangente es horizontal y atraviesa a la curva, pero no es un extremo.

c) Ahora, de la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta puntos de inflexión para $x = 1$ y para $x = 2$.

d) En la gráfica de la derivada vemos que la derivada para $x = 3$ es $y' = -1$. Así, la recta tangente pedida es:

$$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$$

Sustituyendo:

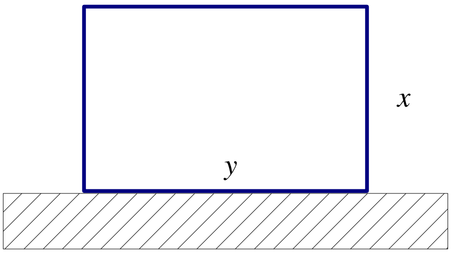
$$y - 2 = -1 \cdot (x - 3)$$

Y simplificando

$$y = -x + 5$$

EJERCICIO 4:

Llamando a las dimensiones tal y como vemos en el dibujo:



$$y + 2x = 300 \;\rightarrow\; y = 300 - 2x$$

OJO: Observemos que al menos es $x > 0$.

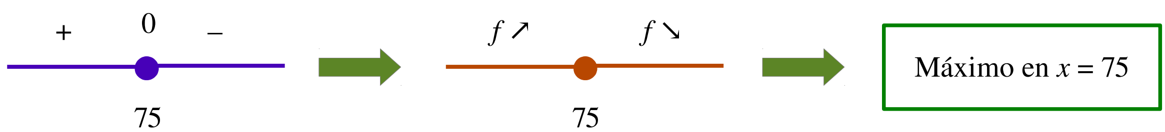
El área del recinto rectangular es lo que tenemos que <u>maximizar</u>

$$f(x) = x \cdot (300 - 2x) = 300x - 2x^2 \quad (x > 0)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 300 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x = 75$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de f:



Concluimos que el recinto debe tener 75 metros perpendiculares a la tapia y 150 metros junto a ella.

La superficie del recinto es

$$S = 150 \cdot 75 = 11250 \text{ m}^2$$

Así que es suficiente para cubrir las necesidades.