Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 15/10/2013	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x-2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \arccos(x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1,25] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} - 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a\ln(x) + bx$$

a) [1,25] Halla a y b para que $4x + y + 3 = 0$ sea tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$.

b) [1,25] Para $a = 2$ y $b = 0$, obtén la ecuación de la tangente a su gráfica que pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 4: [2]

Calcula

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x = -1$ y para $x = 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $f(-1) = \dfrac{-3}{-3} = 1$

Límites: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \begin{cases} f(-1-) = \dfrac{-3}{-3} = 1 \\ f(-1+) = \arccos(-1) = \pi \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito para $x = -1$.

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) = \arccos 1 = 0$

Límites: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = \arccos 1 = 0 \\ f(1+) = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 1$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-6}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-\ln x}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para $x = -1$, como no es continua no puede ser derivable para este valor.

Para $x = 1$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'_-(1) = [-1/0] = -\infty \\ f'_+(1) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

Concluimos que f no es derivable para $x = 1$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como no hay salto infinito, no hay asíntotas verticales.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{x-2} \overset{*}{=} \dfrac{3}{1} = 3$ (* Regla de los grados)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$ (* Regla de L'Hôpital)

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y = 3$ para $x \to -\infty$

$y = 0$ para $x \to +\infty$

EJERCICIO 2:

Como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 0$:

Valor: $f(0) = 1 - 2 = -1$

Límites: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = 1 - 2 = -1 \\ f(0+) = \operatorname{sen}(0) + b = b \end{cases}$

De ahí obtenemos igualando que es $b = -1$.

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a\cos(ax) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0-) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f'(0+) = a \cdot \cos(0) = a \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 0$ deben coincidir, obtenemos igualando que es $a = 2$.

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es:

$$f(x) = a\ln(x) + bx \ \rightarrow \ f'(x) = \frac{a}{x} + b$$
$$4x + y + 3 = 0 \ \rightarrow \ y = -4x - 3$$

a) Calculemos a y b.

La recta tangente toca a la gráfica en el punto de tangencia, así:

$$\text{si} \ \ x = 1 \ \ \text{es} \ \ y = -4 - 3 = -7 \ \rightarrow \ f(1) = -7 \ \rightarrow \ b = -7$$

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia:

$$m = -4 \ \rightarrow \ f'(1) = -4 \ \rightarrow \ a + b = -4 \ \xrightarrow{b=-7} \ a = 3$$

b) Nos queda

$$f(x) = 2\ln(x) \ \rightarrow \ f'(x) = \frac{2}{x}$$

Una tangente cualquiera será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \rightarrow y - 2\ln(a) = \frac{2}{a}(x - a)$$

Como pasa por $(0\,,0)$:

$$0 - 2\ln(a) = \frac{2}{a}(0 - a) \ \rightarrow \ -2\ln(a) = -2 \ \rightarrow \ \ln(a) = 1 \ \rightarrow \ a = \mathrm{e}$$

Así, la tangente es:

$$y - 2\ln(\mathrm{e}) = \frac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) \rightarrow y = \frac{2}{\mathrm{e}}x$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1}{1\cdot \ln x + (x-1)\cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

(*) Regla de L'Hôpital