Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 14/10/2013

EJERCICIO 1: [3,5]

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{4-2x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1,25] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ a\ln(x) + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$$

a) [1,5] Calcula a y b para que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ sea $y = -x + 4$

b) [1] Para $a = 2$ y $b = 4$, obtén la ecuación de la tangente a su gráfica que es paralela a $-x + y + 5 = 0$.

EJERCICIO 4: [2]

Calcula, según los valores de α, el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha \operatorname{sen} x - x}{x^2}$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x=0$ y para $x=2$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x{=}0}$

Valor: $f(0)=\dfrac{-1}{-1}=1$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-)=\dfrac{-1}{-1}=-1 \\ f(0+)=\sqrt{4-0}=2 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito para $x=0$.

$\boxed{x{=}2}$

Valor: $f(2)=\sqrt{4-4}=0$

Límites: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \begin{cases} f(2-)=\sqrt{4-4}=0 \\ f(2+)=0\cdot \mathrm{e}^{-2}=0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=2$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{4-2x}} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ (3-x)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Para $x=0$, como no es continua no puede ser derivable para este valor.

Para $x=2$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

D.L. $\begin{cases} f'(2-)=\left[\dfrac{-1}{0}\right]=-\infty \\ f'(2+)=e^{-2} \end{cases}$

Concluimos que f no es derivable para $x=2$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como no hay salto infinito, no hay asíntotas verticales.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{1}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\,\mathrm{e}^{-x}=[+\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^{x}}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y=2$ para $x\to-\infty$

$y=0$ para $x\to+\infty$

EJERCICIO 2:

Como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 1$:

Valor: $f(1) = 1 - 1 + 2 = 2$

Límites: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = 1 - 1 + 2 = 2 \\ f(1+) = a \ln(1) + b = b \end{cases}$

De ahí obtenemos igualando que es $b = 2$.

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(1-) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ f'(1+) = \dfrac{a}{1} = a \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 1$ deben coincidir, obtenemos igualando que es $a = 1$.

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x} \ \rightarrow \ f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

a) Calculemos a y b.

La recta tangente toca a la gráfica en el punto de tangencia, así:

$$\text{si} \ \ x = 1 \ \ \text{es} \ \ y = -1 + 4 = 3 \ \rightarrow \ f(1) = 3 \ \rightarrow \ \frac{a + b}{1} = 3$$

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de tangencia:

$$m = -1 \ \rightarrow \ f'(1) = -1 \ \rightarrow \ \frac{a - b}{1} = -1$$

Resolvamos ese sencillo sistema:

$$\left. \begin{array}{rcr} a + b & = & 3 \\ a - b & = & -1 \end{array} \right\} \ \rightarrow \ a = 1 \, , b = 2$$

b) En este caso:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4}{x} \ \rightarrow \ f'(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$$

La tangente tendrá la misma pendiente que esa recta:

$$-x + y + 5 = 0 \ \rightarrow \ y = x - 5 \ \rightarrow \ m = 1$$

En el punto de tangencia la derivada es igual a la pendiente de la tangente:

$$f'(x) = m \ \rightarrow \ \frac{2x^2 - 4}{x^2} = 1 \ \rightarrow \ x^2 = 4 \ \xrightarrow{x>0} \ x = 2$$

La fórmula de la recta tangente:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \rightarrow y - 6 = 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = x + 4$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \operatorname{sen} x - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \cos x - 1}{2x} = \left[\frac{\alpha - 1}{0}\right]$$

Debemos distinguir aquí dos casos:

Si $\alpha \neq 1$ eso es un límite infinito:

$$L = \left[\frac{\alpha - 1}{0}\right] = \pm\infty$$

Si $\alpha = 1$ eso es una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$