8 El Espacio Euclídeo

Producto Escalar, Módulo y Ángulo

Se llama producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de los vectores $\vec{u} = (u_1\,, u_2\,, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1\,, v_2\,, v_3)$ al número:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

El módulo de $\vec{v} = (v_1\,, v_2\,, v_3)$ es el número dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Un vector se dice unitario cuando tiene módulo 1.

El ángulo φ que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el que verifica

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Producto Vectorial

Se llama producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ de los vectores $\vec{u} = (u_1\,, u_2\,, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1\,, v_2\,, v_3)$ al vector:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Es $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a la vez y su sentido es el del avance del sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Su longitud es igual al área del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se deduce de esto que:

$$\mathscr{A}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Producto Mixto

Se llama producto mixto $[\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}]$ de $\vec{u} = (u_1\,, u_2\,, u_3)$, $\vec{v} = (v_1\,, v_2\,, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1\,, w_2\,, w_3)$ al número:

$$[\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Su expresión analítica es muy sencilla:

$$[\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Y se comprueba que su valor absoluto es igual al volumen del paralelepípedo que determinan $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Por ello, el volumen de un tetraedro es:

$$\mathscr{V}\,(ABCD) = \frac{1}{6}\,|\,[\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}]\,|$$

Perpendicularidad

Vectores ortogonales:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Vector normal a un plano:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \to \vec{n} = (a\,, b\,, c)$$

Ecuación de plano que pasa por $P = (x_0\,, y_0\,, z_0)$ y cuyo vector normal es $\vec{n} = (a\,, b\,, c)$:

$$\pi : a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales.

$$\pi \perp \pi' \iff \vec{n} \perp \vec{n}'$$

Perpendicularidad de recta y plano:

$$r \perp \pi \iff \vec{v}_r \parallel \vec{n}$$

Una recta r es paralela a un plano π cuando su vector director es ortogonal al vector normal al plano

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r \perp \vec{n}$$

Distancias

Distancia entre dos puntos:

$$\mathrm{d}\,(A\,, B) \overset{def}{=} |\overrightarrow{AB}|$$

Distancia del punto $P = (x_0\,, y_0\,, z_0)$ al plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$\mathrm{d}\,(P\,, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia entre planos paralelos: se toma un punto de uno de ellos y se halla la distancia al otro plano.

Distancia entre recta y plano paralelos: se toma un punto de la recta y hallamos la distancia al plano.

Distancia de un punto a una recta:

$$\mathrm{d}\,(P\,, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Distancia entre rectas paralelas: se toma un punto de una de ellas y medimos la distancia a la otra recta.

Distancia entre dos rectas que se cruzan:

$$\mathrm{d}\,(r\,, s) = \frac{|\,[\overrightarrow{P_r P_s}\,, \vec{v}_r\,, \vec{v}_s]\,|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

8 El Espacio Euclídeo

Proyección sobre un Plano

Para hallar la proyección del punto P sobre π, se halla primero la recta r perpendicular a π por ese punto (tomamos $\vec{v}_r = \vec{n}$).

El punto proyección Q es la intersección del plano con la recta perpendicular r (pie de la perpendicular).

La distancia de P a π es

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi) = |\overrightarrow{PQ}|$$

El simétrico P'del punto P cumple

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P$$

Proyección sobre una recta

Queremos hallar la proyección de P sobre r.

Hallamos primero el plano π perpendicular a r por ese punto (tomamos $\vec{n} = \vec{v}_r$).

Así el punto proyección Q es la intersección de dicho plano con la recta r (pie de la perpendicular).

Observemos que:

La distancia de P a r es

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = |\overrightarrow{PQ}|$$

El simétrico P'del punto P cumple

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P$$

La perpendicular y secante a r por P es la recta PQ.

Método del Punto Genérico

Muy utilizado cuando se quiere hallar el punto de una recta que cumple una condición.

Se pone la recta la recta en paramétricas y se expresa el punto buscado en función del parámetro. Ahora usamos la condición para conseguir una ecuación cuya incógnita sea el parámetro. Al resolver la ecuación obtendremos el valor del parámetro correspondiente al punto buscado.

Ejemplo: hallemos en la recta r el punto P cuya distancia a un plano π sea igual a d. Ponemos la recta en paramétricas y el punto es el correspondiente al valor del parámetro que cumpla la condición

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi) = d$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas r y s la distancia entre ellas es el módulo del vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ donde se cumple:

$$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\text{ y }\; \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{v}_s = 0$$

La recta P_rP_s es perpendicular y secante común.

Nota importante: el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ es perpendicular a ambas rectas y por ello es paralelo a $\overrightarrow{P_rP_s}$, pero puede no tener la longitud que separa las rectas.

Ángulos

El ángulo entre dos rectas es el agudo determinado por dos cualesquiera de sus respectivos vectores directores.

El ángulo entre dos planos es igual al ángulo agudo determinado por sus vectores normales.

El ángulo entre una recta y un plano es igual al complementario del ángulo agudo determinado por un vector director de la recta y uno normal al plano.